

N° D'ORDRE :

255

Série A

N° 231

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

D. C. LAWS

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LA FLEXION
DE TÔLES MINCES RECTANGULAIRES ENCASTRÉES
ET SOUMISES A DES CHARGES UNIFORMÉMENT
RÉPARTIES.

2^e THÈSE. — RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LES DÉFOR-
MATIONS DES NAVIRES.

101 MAR 1932

Soutenues le

1932, devant la Commission d'Examen.

MM. VILLAT, *Président.*

BENARD

VILLEY

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1932



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547518_0077

N^o D'ORDRE :

233

Série A

N^o 231

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

D. C. LAWS

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LA FLEXION
DE TÔLES MINCES RECTANGULAIRES ENCASTRÉES
ET SOUMISES A DES CHARGES UNIFORMÉMENT
RÉPARTIES.

2^e THÈSE. — RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LES DÉFOR-
MATIONS DES NAVIRES.

Soutenues le

1932, devant la Commission d'Examen.

MM. VILLAT, *Président.*
BENARD } *Examineurs.*
VILLEY }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1932

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen..... C. MAURAIN, Professeur. Physique du Globe.
Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires. H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC,
E. HEROUARD, E. PICARD, Rémy PERRIER.

GOURSAT.....	Analyse supérieure.
N.....	Mécanique physique et expérimentale.
JANET.....	Électrotechnique générale.
WALLERANT.....	Minéralogie.
PAINLEVÉ.....	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
CAULERY.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Emile BOREL.....	Calcul des probabilités et Physique mathém.
ABRAHAM.....	Physique.
MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
CARTAN.....	Géométrie supérieure.
Gabriel BERTRAND.....	Chimie biologique.
Jean PERRIN.....	Chimie physique.
LAPICQUE.....	Physiologie générale.
M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale et radioactivité.
G. URBAIN.....	Chimie générale.
L. MARCHIS.....	Aviation.
VESSIOT.....	Théorie des fonctions et théorie des transform.
COTTON.....	Physique générale.
DRACH.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
Ch. FABRY.....	Physique.
LESPIEAU.....	Théories chimiques.
PORTIER.....	Physiologie comparée.
Charles PÉREZ.....	Zoologie.
E. BLAISE.....	Chimie organique.
DANGEARD.....	Botanique.
Léon BERTRAND.....	Géologie structurale et Géologie appliquée.
RABAUD.....	Biologie expérimentale.
G. JULIA.....	Calcul différentiel et intégral.
Paul MONTEL.....	Mécanique rationnelle.
V. AUGER.....	Chimie appliquée.
WINTREBERT.....	Anatomie et Histologie comparées.
DUBOSCQ.....	Biologie maritime.
Engène BLOCH.....	Physique théorique et Physique céleste.
A. MAILHE.....	Étude des combustibles.
L. LUTAUD.....	Géographie physique et Géologie dynamique.
Henri VILLAT.....	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB.....	Géologie.
P. PASCAL.....	Chimie minérale.
Léon BRILLOUIN.....	Théories physiques
ESCLANGON.....	Astronomie.
H. BÉNARD.....	Mécanique expérimentale des fluides.
G. MAUGUIN.....	Minéralogie.
BLARINGHEM.....	Botanique.
GUILLIERMOND.....	Botanique (P.C.N.).
DENJOY.....	Mathématiques générales.
DUFOUR.....	Physique (P.C.N.).

Professeurs.....



PÉCHARD.....	Chimie (Enseigt P.C.N.).
GUILLET.....	Physique.
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.
MICHEL-LEVY.....	Pétrographie.
DEREIMS.....	Géologie.
MOUTON.....	Chimie physique.
DUNOYER.....	Optique appliquée.
JAVILLIER.....	Chimie biologique.
ROBERT-LEVY.....	Zoologie.
DEBIERNE.....	Radioactivité.
DARMOIS.....	Physique.
BRUHAT.....	Physique.
E. PICARD.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
JOLEAUD.....	Paléontologie.
M. FRECHET.....	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.

M ^{me} RAMART-LU-	
CAS.....	Chimie organique.
BEGHIN.....	Mécanique théorique des fluides.
FOCH.....	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER.....	Physique (P.C.N.).
VILLEY.....	Mécanique physique et expérimentale.
DE BROGLIE.....	Théories physiques.
LABROUSTE.....	Physique du Globe.
FREUNDLER.....	Chimie (P.C.N.).
PRENANT.....	Zoologie.
P. JOB.....	Chimie générale.
CHRETIEN.....	Optique appliquée.
BOHN.....	Zoologie (P.C.N.).
BOURGUEL.....	Chimie (P.C.N.).
COMBES.....	Sciences Naturelles (P.C.N.).
GARNIER.....	Mécanique rationnelle.

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire. TOMBECK.

PREMIÈRE THÈSE

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LA FLEXION
DES
TÔLES MINCES RECTANGULAIRES ENCASTRÉES
ET
SOUMISES A DES CHARGES UNIFORMÉMENT RÉPARTIES

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER.

HISTORIQUE.

L'importance du rapport de ce sujet avec la Construction mécanique a suggéré les recherches détaillées dans la présente Thèse.

Le problème de la flexion des tôles n'est pas nouveau; il constitue seulement une partie d'un champ étendu de recherches mathématiques, auxquelles d'éminents mathématiciens ont consacré leurs travaux sur une longue période. Dans ces recherches, leurs efforts ont été peut-être orientés davantage sur la philosophie du sujet que sur une application à la construction pratique, ce qui pourrait expliquer la somme relativement faible de travail expérimental tenté dans certaines directions.

Dans quelques cas seulement, des recherches expérimentales ont porté sur les tôles rectangulaires encastrées.

Une assez grande incertitude a régné dans l'esprit des ingénieurs sur ce qui se passe lorsque les tôles rectangulaires encastrées sont soumises à des charges externes; et cependant la question a été rarement étudiée expérimentalement en vue de découvrir

une similitude ou une dissemblance entre la prévision de la théorie et l'observation des faits.

En l'absence de solution théorique complète de ce problème particulier, on a eu recours à des calculs numériques approximatifs de hautes mathématiques. Mais ces méthodes exigent tant de temps dans leur application que leur emploi est pour ainsi dire interdit aux ingénieurs, qui disposent d'un temps limité, et désirent, autant que possible, utiliser les moyens de calcul les plus simples.

La flexion des tôles élastiques, étudiée en premier lieu par Navier, fut poursuivie par Saint-Venant, Lord Kelvin et autres. Les formules de Grashof ⁽¹⁾ ont retenu l'attention particulière des ingénieurs en raison de ses expressions simples pour l'effort maximum et la flexion maxima, mais elles sont devenues l'objet d'une certaine méfiance comme ne représentant plus les faits tels que nous les connaissons par l'expérience et par la pratique actuelle de la Construction mécanique.

Des recherches plus récentes, celles du professeur M. J. Hadamard, sont d'un intérêt scientifique supérieur, et sa thèse générale sur ce sujet, exposée dans son «Mémoire sur le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées», a été particulièrement retenue par l'Académie des Sciences de l'Institut de France en 1908.

Vers la même époque, Walter Ritz ⁽²⁾ a proposé une méthode d'approximation mathématique par laquelle il a cherché une solution satisfaisante, celle-ci était suivie par la dissertation de Hencky publiée en 1913.

Les études théoriques de Mesnager sont d'une valeur pratique considérable. En adoptant des fonctions différentes de celles de Ritz, il a obtenu ⁽³⁾ des flexions de tôles minces qui ne s'accordent pas avec celles déduites selon Ritz dans les conditions débattues dans la présente Thèse. Il a aussi obtenu une solution ⁽⁴⁾ pour les fortes tôles soutenues à la limite et assujetties à une charge con-

(1) Voir à la page 10.

(2) Voir à la page 35.

(3) Paris, *Comptes rendus*, t. 163, 1916.

(4) Paris, *Comptes rendus*, t. 164, 1917.

centrée au centre de la tôle. Plus récemment il a discuté la question d'élasticité dans un Mémoire ⁽¹⁾ de grande valeur pour les ingénieurs portant sur une étude de corps cylindrique par MM. Henri Villat et Maurice Roy.

L'attention accordée par la Presse technique au Mémoire de Ritz en ces dernières années expliquera pourquoi l'auteur l'a pris comme base de comparaison avec les résultats de ses propres recherches expérimentales.

Il n'est nullement question dans cette Thèse de discuter les éléments de la Théorie élastique, mais plutôt de prendre les résultats fondamentaux de cette théorie, aujourd'hui si bien établie, et d'essayer de trouver à la lumière des recherches expérimentales une explication de toute divergence qui pourrait surgir entre la théorie et l'expérience ou la pratique.

La présentation de ce Mémoire a donc, avant tout, un but pratique.

CHAPITRE II.

BUT DES RECHERCHES.

SUPPOSITIONS FAITES DANS LA PRATIQUE ET DANS LA THÉORIE ÉLASTIQUE.

Dans le cours normal de ses études, l'ingénieur est habitué à admettre des conditions externes définies de chargement, etc. et de vérifier ensuite les conditions résultant de la flexion et de l'effort. Afin d'en simplifier l'analyse, et de rester dans la limite de mathématiques pas trop abstraites, il a l'habitude de faire certaines suppositions qu'il estime raisonnables. Dans la plupart des cas, cette méthode est peut-être suffisante pour ses besoins lorsqu'on songe que l'ingénieur adopte invariablement un coefficient de sécurité que, par expérience, il juge suffisant pour le couvrir des contingences (défaut d'uniformité de la qualité des matériaux, incertitude de la nature exacte des charges ou forces externes auxquelles la structure pourra être soumise dans la pratique, équation personnelle relative à la variabilité de la main-d'œuvre).

(1) Paris, *Comptes rendus*, t. 160, 1950.

L'intérêt que la question de la tôle mince encastrée de forme rectangulaire a soulevé au cours de ces dernières années est dû, dans une grande mesure, au développement considérable du transport et de l'emmagasiner des liquides en vrac; il est désirable, par conséquent, d'examiner, plus minutieusement que ce n'est le cas ordinairement chez les ingénieurs, les principes qui sont à la base de la solution de ce problème.

Il devient donc nécessaire de recourir à l'aide des principes mathématiques de l'Élasticité; ayant analysé les conditions générales de la résistance et de l'effort, on déterminera comment elles peuvent être amenées à concorder avec les conditions externes réelles trouvées dans ce cas particulier.

La discussion générale du problème d'après les principes théoriques suppose une élasticité parfaite, une matière homogène et isotrope; elle suppose que les tôles sont d'épaisseur uniforme, que l'épaisseur est faible par rapport aux dimensions superficielles, et que la flexion par rapport à ces dernières est peu importante.

La surface équidistante des surfaces des tôles est prise comme plan de référence (x, y) , et l'axe des z perpendiculaire à celui-ci. L'origine peut être prise en tout point convenable, généralement au centre ou à l'un des coins de la tôle.

Une section de la tôle faite par un plan parallèle à l'axe des z avant la flexion de la tôle est supposée rester perpendiculaire à la surface centrale lorsque la tôle se déforme.

Certaines de ces suppositions sont évidemment inexactes; il sera indiqué plus loin de quelle manière elles affectent les résultats.

Lorsque, comme dans le cas actuel, la charge externe sur la tôle est appliquée hydrauliquement, et supposée répartie uniformément, la direction de la charge par unité de surface variera au fur et à mesure de la déformation le long des bords de la tôle. La charge résultante réelle sur la tôle sera, par conséquent, plus forte que celle généralement supposée, mais elle aura des composantes parallèles et perpendiculaires à la surface initiale de la tôle. On provoquera ainsi une flexion moindre au centre de la tôle, et une flexion plus accentuée à mesure que l'on approchera des bords, en comparaison de celles qui seraient éprouvées avec une direction constante de la charge.

CHAPITRE III.

L'ÉQUATION FONDAMENTALE.

L'équation fondamentale qui se dégage de l'examen général d'un état d'équilibre d'après les suppositions ci-dessus est la suivante :

$$D \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial^4 y^4} \right) = p \quad \text{ou} \quad \nabla^4 z = \frac{p}{D},$$

où $D = \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{ET^2}{12}$ et où $\frac{1}{m}$ est le coefficient de Poisson, T l'épaisseur de la tôle, p la charge externe par unité de surface, et $z = 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$, aux bords de la tôle et $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$ au centre de la tôle.

Méthode d'analyse de Hencky. — Il n'est pas facile de remplir les conditions de pente aux extrémités, etc. et celles de l'équation ci-dessus. Il y a quelques années, le professeur Love a très aimablement attiré l'attention de l'auteur sur une méthode d'attaque adoptée par Hencky en 1913. Combinant une intégrale particulière de l'équation fondamentale avec la fonction complémentaire, il parvint à une solution approximative. Le principe de cette méthode a été appliqué depuis par Sezawa ⁽¹⁾ et par Ingles ⁽²⁾. Beaucoup dépend de l'intégrale particulière choisie. Prenant l'origine au centre de la tôle, Hencky a commencé par supposer

$$z = \frac{3}{16} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{p a^2 b^2}{ET} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \chi \left(\frac{y}{b} \right),$$

où a et b sont les côtés du rectangle; et que la fonction χ satisfait à l'équation différentielle $\nabla^4 \chi = 0$ et les conditions des extrémités

$$\begin{aligned} \chi &= 0 & \text{et} & \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = \pm \frac{4}{a} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right) & \quad \text{à} & \quad x = \pm \frac{a}{2}, \\ \chi &= 0 & \text{et} & \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = \pm \frac{4}{b} \left(1 - \frac{4x^2}{a^2} \right) & \quad \text{à} & \quad y = \pm \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Travaux de la Japanese Society of Naval Architects*, 1923.

⁽²⁾ *Compte rendu de l'Institution of Naval Architects*, 1925.

La fonction χ est supposée avoir la forme

$$\chi = \Sigma_n \left\{ A_n X_n(x) \cos \frac{n\pi y}{b} + B_n Y_n(y) \cos \frac{n\pi x}{a} \right\},$$

où

$$X_n(x) = \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} - \frac{2x}{a} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{2b}},$$

$$Y_n(y) = \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} - \frac{2y}{b} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}},$$

et A_n, B_n sont des constantes qui doivent être ajustées de manière que, lorsque $y \rightarrow \pm \frac{b}{2}$,

$$\Sigma_n A_n \left(\frac{2}{a} + \frac{2n\pi}{b \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} + \Sigma_n B_n \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi y}{2} Y_n(y) = -\frac{4}{a} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right);$$

et, lorsque $x \rightarrow \pm \frac{a}{2}$,

$$\Sigma_n B_n \left(\frac{2}{b} + \frac{2n\pi}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + \Sigma_n A_n \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} X_n(x) = -\frac{4}{b} \left(1 - \frac{4x^2}{a^2} \right)$$

et n sont des nombres impairs 1, 3, 5, etc.

Il n'entre pas dans nos intentions de discuter davantage cette méthode, et elle n'est mentionnée ici que pour l'intérêt qu'elle présente en comparaison avec la méthode de calcul de Ritz, décrite plus loin dans cette Thèse.

CHAPITRE IV.

DIFFÉRENCE ENTRE LES RÉSULTATS THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTAUX. DIFFICULTÉS DU PROBLÈME.

Il est important cependant de noter que, relativement, cette méthode conduit à des flexions qui ne sont pas très différentes de celles obtenues par Ritz. Les chiffres comparatifs et les flexions

observées, ramenés à l'unité de flèche centrale, sont indiqués ci-dessous pour le petit axe de l'une des tôles utilisées dans l'expérience, et dont il est question à la page 37.

Flèche pour la tôle de $91^{\text{cm}},44 \times 36^{\text{cm}},83$.

Section.	y . cm	Expérience.	Ritz.	Hencky.
Bord de la tôle.....	0	0	0	0
<i>a</i>	2,413	0,073	0,060	0,060
<i>b</i>	4,191	0,181	0,163	0,163
<i>c</i>	7,747	0,442	0,497	0,442
<i>d</i>	11 363	0,710	0,725	0,717
<i>e</i>	14,859	0,915	0,924	0,927
<i>f</i> (centre de la tôle).....	18,415	1,0	1,0	1,0

Autant qu'on peut le constater, il n'a pas été possible de remplir théoriquement toutes les conditions du problème. La difficulté se présente au voisinage du bord, et pourrait expliquer, au moins en partie, la divergence entre le calcul théorique et les observations relatives à cette partie de la tôle.

Si les flèches sont exprimées en proportion de la flèche centrale (maxima), et les résultats représentés graphiquement, il ne semble pas y avoir une grande différence de *caractère* entre les deux surfaces représentatives.

La flèche centrale *réelle*, cependant, est moindre que celle calculée théoriquement, et la courbure de la surface de la tôle en un point quelconque est différente du résultat théorique.

Cette question sera reprise ultérieurement; nous nous proposons en attendant d'analyser certaines expériences qui ont été faites sur des tôles de forme circulaire et de forme rectangulaire. Les premières seront rappelées brièvement, et seulement dans la mesure où les résultats obtenus ont un rapport avec ce qui a été observé dans le cas de tôles rectangulaires.

CHAPITRE V.

EXPÉRIENCES PRÉCÉDENTES SUR LES TÔLES CIRCULAIRES ET RECTANGULAIRES.

La première expérience à noter sur des tôles circulaires est celle de Steinthal ⁽¹⁾, effectuée à l'Université de Leeds en 1911.

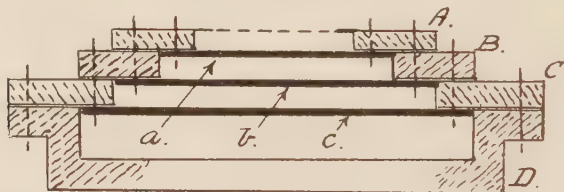
⁽¹⁾ Voir *Engineering*, 26 mai 1911.

Les tôles en acier doux variant de 15,2 à 30^{cm}, 5, 45,7 et 61^{cm}, 0 de diamètre et de 3,17 à 6^{mm}, 35, 9,52 et 12^{mm}, 7 d'épaisseur respectivement, furent montées sur un châssis en fonte, disposé pour loger les différentes dimensions de tôles au moyen d'anneaux boulonnés directement au châssis, ou à l'une et l'autre des tôles successivement, comme il est indiqué dans le croquis ci-dessous.

La charge, appliquée hydrauliquement à l'espace limité par le châssis et la tôle, était mesurée au moyen de manomètres appropriés, et la flèche de la tôle par une adaptation de l'extensomètre « Goodman ».

L'étanchéité était assurée par des rondelles de caoutchouc au-dessus et au-dessous du trou de boulon, mais des fuites se produisirent, ainsi qu'un mouvement à l'extrémité des tôles. Pour cette raison, et par suite du dispositif adopté pour maintenir les tôles de diamètre plus faible, les flèches observées étaient probablement plus grandes que les flèches réelles. Malgré ces

Fig. 1.



A, B, C, rondelles, fonte de fer; D, fondation, fonte de fer;
a, b, c, tôle d'acier.

défauts, les flèches observées au centre de la tôle étaient invariablement inférieures à celles calculées par la formule employée par Grashof pour les tôles fixes, soit :

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{pr^4}{ET^3},$$

où

$$\frac{1}{m} = \text{coefficient de Poisson, supposé} = \frac{1}{3}.$$

Steinthal attribua cette différence pour partie au changement de direction de la charge au fur et à mesure de la courbure de la tôle. En outre, on a trouvé que la courbe de la flèche centrale en fonction des valeurs de la charge devenait concave vers le

bas lorsque la flèche dépassait le $1/50^e$ environ du rayon de la tôle.

Carrington (1) effectua des expériences semblables en 1928, sur des tôles d'un diamètre fixe (67^{cm} , 3) et d'épaisseurs décroissantes de 15^{mm} , 9 à 1^{mm} , 27. La méthode employée était semblable à celle de Steinthal, sauf que toutes les tôles étaient boulonnées séparément sur le châssis.

Les flèches mesurées au moyen d'un micromètre sensible jusqu'à 0^{mm} , 000254 furent comparées avec celles calculées d'après l'équation générale :

$$z = \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{1}{ET} (P r^3 - 16 B_1 r^2 + 48 D_1),$$

dont le premier terme était celui employé par Grashof, où B_1 et D_1 sont des constantes déterminées par l'expérience.

Sauf pour les tôles les plus minces, on trouva qu'une pente existait aux extrémités. D'une manière générale, les flèches centrales observées étaient inférieures à celles calculées, et pour les valeurs supérieures au $1/10^e$ de l'épaisseur de la tôle, la courbe des flèches était concave vers le bas, indiquant, comme dans les expériences de Steinthal, l'influence de l'effort au milieu de la surface de la tôle.

Les principales conclusions tirées de ces deux expériences sont sensiblement les mêmes, à savoir que « l'effort sur la surface médiane de la tôle exerce une influence sur la flexion de la tôle et doit être pris en considération ».

Les expériences, cependant, qui intéressent le plus notre thèse sont celles effectuées par Crawford (2) sur des tôles rectangulaires encastrées, décrites dans une étude publiée dans les *Travaux de la Royal Society of Edinburgh* (1913) et celles de Montgomerie, résumées dans les *Comptes rendus de l'Institute of Naval Architects* (1919).

En ce qui concerne les travaux de Crawford, il est à remarquer que ses tôles étaient en acier plané, dont la plus grande dimension était 20^{cm} , 3 et la moindre 10^{cm} , 2, l'épaisseur variant de 2^{mm} , 54 à 1^{mm} , 37.

(1) Voir *Engineering*, 13 janvier 1928.

(2) *Travaux de la Royal Society of Edinburgh*, vol. 32, 1913.

Lorsque les tôles sont spécialement préparées, et leurs surfaces traitées de cette manière, il est douteux qu'une véritable comparaison puisse être faite entre les résultats obtenus expérimentalement et ceux obtenus, soit sur des tôles d'acier doux provenant directement des Laminoirs, soit de calculs d'après des formules théoriques basées sur les propriétés caractéristiques d'un matériel élastique isotrope, auxquelles, on peut le supposer, l'acier doux se conforme approximativement. On s'attendrait, par exemple, à ce que la résistance de la tôle ne fût pas uniforme sur toute son épaisseur, c'est-à-dire que la résistance serait plus grande dans les couches superficielles qu'à l'intérieur de la tôle.

Crawford compara ses résultats avec ceux calculés à l'aide des formules de Grashof pour les tôles rectangulaires encastrées, soit :

$$\text{Flexion maxima (centrale)} = \frac{p a^4 b^4}{32(a^4 + b^4)} \frac{1}{ET^3},$$

$$\text{Effort maximum au milieu du plus long côté} = \frac{p a^4 b^2}{2(a^4 + b^4)T^2},$$

où

p = charge par unité de surface.

T = épaisseur de la tôle,

$\frac{a}{b} \ll \text{unité},$

et conclut que le résultat de Grashof était à peu près correct en ce qui concerne les flèches, mais qu'il était beaucoup trop bas en ce qui concerne l'effort maximum. Si ces conclusions étaient vraies, cela signifierait que l'effort maximum pourrait être même plus grand, et la flèche maxima plus faible d'environ 50 pour 100 à ceux calculés par la formule ordinaire de la poutre; cette éventualité semble non seulement contraire à une conception logique du problème, mais en désaccord avec ce qui se passe dans la pratique; des constructions soumises à des charges hydrostatiques suffisantes d'après la formule pour assurer la rupture, ne se déforment pas.

CHAPITRE VI.

L'ANALYSE DE HNOTT DES RÉSULTATS DE CRAWFORD. COMPARAISON AVEC LES EXPÉRIENCES DE L'AUTEUR.

Crawford admit une inégalité initiale dans les tôles, et un glissement aux extrémités, pour lesquels, cependant, aucune

correction ne semble avoir été faite. Il semblerait donc que ses conclusions réclameraient quelque ajustement.

Ses résultats furent subséquemment analysés par le professeur Knott ⁽¹⁾, d'après la méthode de Ritz; il semble avoir été satisfait de celle-ci.

L'analyse de Knott se borna cependant à une comparaison de la flèche en un point quelconque et la flèche maxima (centrale), et non des flèches calculées et observées en des points correspondants. Lorsqu'il dit donc que cette comparaison est satisfaisante, il vise évidemment la concordance de ses résultats avec la courbe représentant le rapport correspondant calculé d'après Ritz. Ceci est montré par le diagramme suivant (*fig. 2*), se rapportant à l'axe de la tôle carrée dont Crawford s'est servi pour son expérience.

Les points expérimentaux sont un peu irréguliers, mais ils ont évidemment tendance à se situer sur une courbe qui, à mesure que nous approchons des extrémités, est plus ample que Ritz ne l'a indiqué.

Des expériences de l'auteur ont conduit au diagramme ci-après (*fig. 3*), qui a été ajouté aux fins de comparaison avec l'analyse de Knott des résultats de Crawford.

Le diagramme se rapporte au petit axe de la tôle rectangulaire 91^{cm}, 44 × 36^{cm}, 83 mentionnée à la page 6, et montre: (*a*) « la proportion de la déformation en un point quelconque à celle au centre de la tôle », telle qu'elle est observée et calculée d'après Ritz, et (*b*) la relation entre les flèches observées et calculées elles-mêmes.

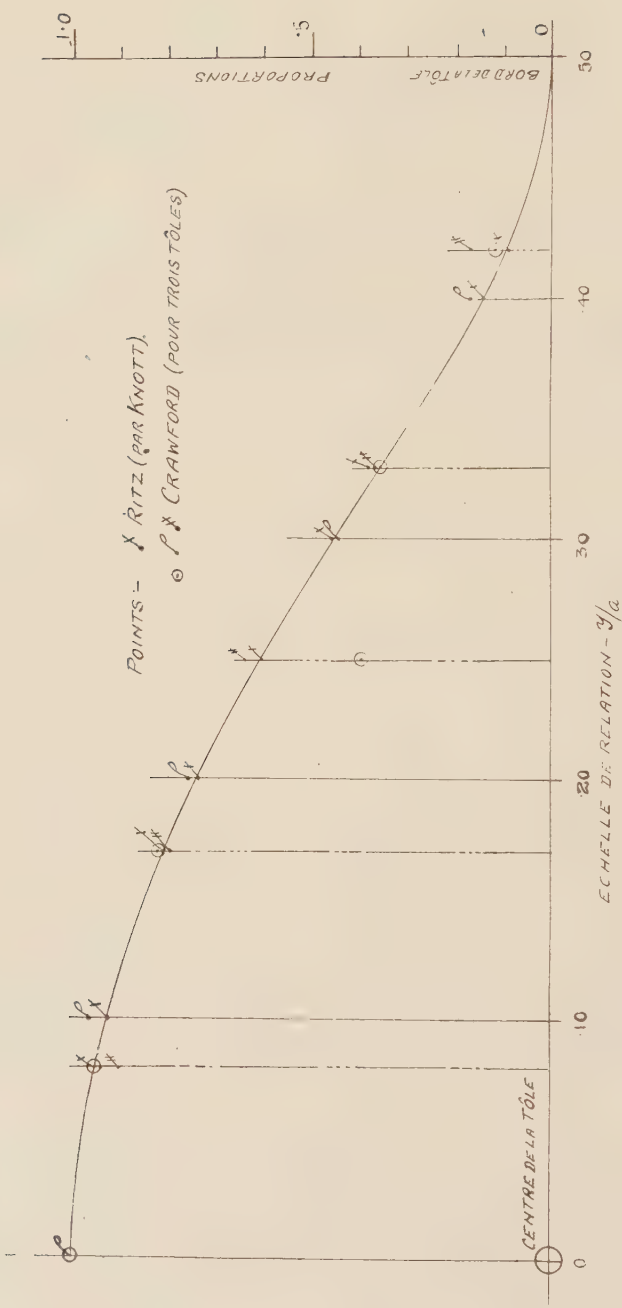
Deux points sont à remarquer ici : la ressemblance entre (*a*) et la relation correspondante trouvée par Knott en analysant les résultats de Crawford, et, en second lieu, la déformation plus faible observée au centre et l'ampleur de la courbe expérimentale vers le bord de la tôle, comparée avec la courbe théorique.

Cette constatation se reproduit pour d'autres sections de la tôle; on en trouvera à l'Appendice les chiffres comparatifs.

L'expérience de Montgomerie se limita à quatre tôles en acier doux d'épaisseurs variées, telles qu'elles sont fournies à l'industrie par

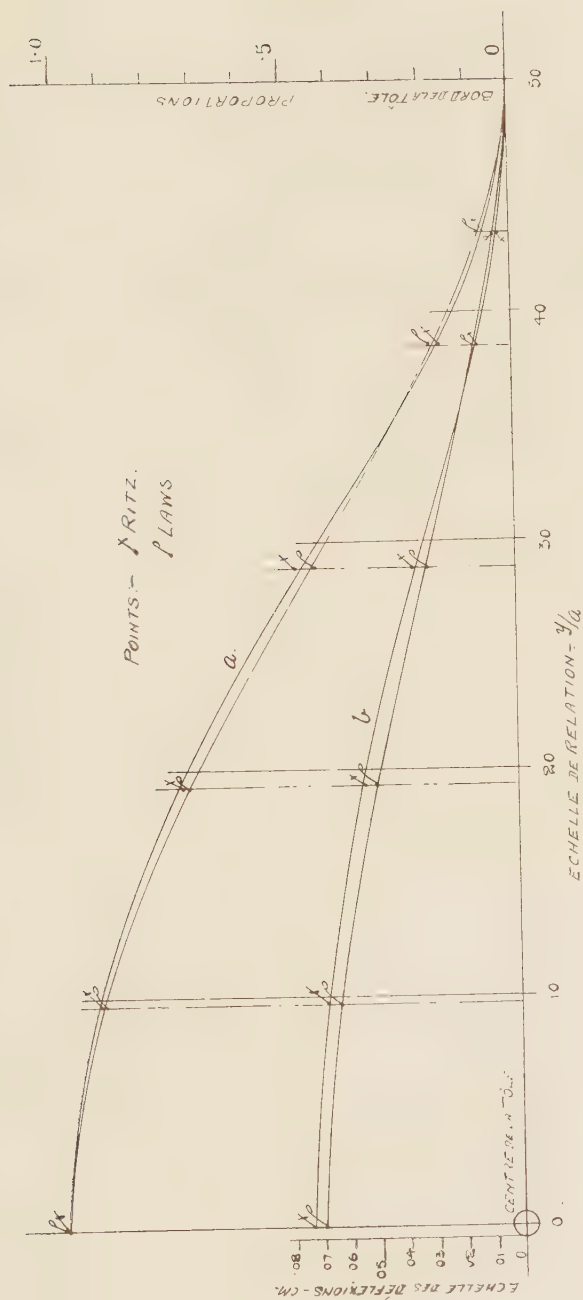
(¹) *Travaux de la Royal Society of Edinburgh*, vol. 32, 1913.

Fig. 2.



Tôle carrée de Crawford, proportion de la déflexion à la déflexion centrale (axe).

Fig. 3.



Toile rectangulaire de Laws, $91^{\text{cm}}, 44 \times 36^{\text{cm}}, 81 \times 0^{\text{cm}}, 6197$.

a, proportion de la déflexion à la déflexion centrale (petit axe);
b, courbes des déflexions.

les Aciéries. Les tôles étaient de dimension constante, $1220 \times 610^{\text{cm}}$ et leurs bords encastrés dans un solide châssis en fonte d'une manière semblable à celle adoptée dans l'expérience de Crawford.

Les détails enregistrés sont les suivants :

Épaisseur de la tôle (en mm)....	6,22	9,04	12,2	18,7
Charge (en kg/cm^2).....	0,7045	1,409	2,1135	2,818
Flexion maxima (en mm).	5,22	4,14	2,28	1,04

La valeur du module de Young n'est pas indiquée, mais comme les flèches maxima calculées par la formule de Grashof sont données, soit

$$5^{\text{mm}},33, \quad 4^{\text{mm}},29 \quad 2^{\text{mm}},32 \quad 0^{\text{mm}},85,$$

on suppose que le module fut déterminé pour chacune des tôles. De ces chiffres on peut déduire la valeur de E (en kgm/cm^2) comme multiples de 10^6 respectivement, ainsi :

$$2,220, \quad 1,803, \quad 2,044, \quad 2,092.$$

Ces valeurs ne sont pas applicables à l'acier doux de la qualité requise pour les constructions, et représentent une différence maxima de 19 pour 100.

Parmi les flèches enregistrées, celle de la tôle d'épaisseur maxima est plus grande que celle calculée d'après la formule de la poutre encastrée, soit $0^{\text{mm}},89$. Une pente considérable semble avoir affecté les bords pour laquelle aucune correction ne semble avoir été faite. Les flèches réelles seraient donc inférieures à celles enregistrées.

L'épaisseur de la tôle était obtenue par calibrage.

Dans le voisinage des bords de la tôle, l'épaisseur est généralement très différente de celle prise au centre, par suite du jeu des cylindres au cours du laminage, et les mesures prises de cette manière risquent d'être trompeuses, à moins qu'on ait soin de calibrer la tôle sur tous les points de la surface. La seule méthode satisfaisante, peut-être pour obtenir l'épaisseur moyenne, serait de peser la tôle, et de rechercher en même temps par l'expérience le poids spécifique du matériel.

Sous réserve des corrections indiquées ci-dessus, le caractère des courbes de flexion est relativement semblable à celui obtenu par d'autres chercheurs.

Nous avons essayé dans le préambule d'examiner aussi briè-

vement et aussi clairement que possible les traits saillants des recherches antérieures, théoriques et expérimentales, ayant un rapport spécial avec ce problème particulier.

En ce qui concerne l'étude générale des principes mathématiques de l'élasticité, le professeur Love, dans son *Traité classique* ⁽¹⁾, a soigneusement examiné le champ de la recherche théorique, et il fait remarquer, par endroits, les difficultés à vaincre en s'attaquant à certains problèmes. Dans le cas actuel, le mathématicien rencontre des conditions qu'il semble impossible de remplir rigoureusement.

Dans les recherches récentes, des méthodes approximatives ont été adoptées pour surmonter ces difficultés. Elles ont déjà été citées.

L'analyse du problème nécessite tant de temps que cette phase expérimentale de recherches n'a été tentée que dans quelques cas seulement.

Dans les expériences décrites par la suite, l'auteur s'est efforcé de prévenir les difficultés que rencontre le chercheur, et par une disposition soigneuse des appareils d'éliminer autant que possible les sources d'erreur, de façon à présenter les résultats avec le minimum de corrections.

L'auteur espère que ce travail aura pour effet d'éclaircir ce sujet important, si intimement associé aux travaux de la Construction mécanique.

CHAPITRE VII.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

RAISONS DU DÉSACCORD ENTRE LA THÉORIE ET L'EXPÉRIENCE.

D'un examen du travail expérimental, certaines conclusions peuvent être tirées :

1° Il y a accord général entre la nature des résultats observés par les différents chercheurs. Lorsqu'en apparence il y a désaccord, il peut généralement être attribué à quelque cause associée à l'appareil ou à la tôle elle-même, telle que courbure initiale

(1) *The Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge, 4^e édition, 1927).

ou effort dans la tôle, glissement de la tôle à ses extrémités, encastrement défectueux, etc.

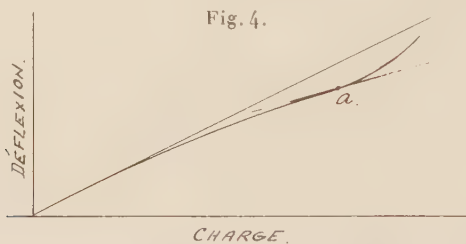
2^o La flexion dans le corps de la tôle est moindre, et, dans le voisinage des bords légèrement plus grande, que celle calculée théoriquement.

3^o L'effort sur la surface médiane de la tôle résultant de la déformation exerce une influence en réduisant la flèche, plus apparente lorsque cette dernière croît; cela expliquera, dans une certaine mesure, la différence entre les valeurs de la flexion obtenues expérimentalement, et celles des calculs théoriques où cette question n'est pas prise en considération.

4^o La méthode de Ritz et les méthodes semblables qui dépendent d'approximations théoriques ne semblent pas suffisantes pour donner la véritable forme de la tôle sous flexion.

Pour mettre plus en harmonie la Théorie et l'Expérience, il semble qu'il soit nécessaire d'introduire dans la solution théorique un coefficient comprenant des facteurs tels que : (a) changement en direction de la charge résultant du changement de courbure à mesure que la tôle s'infléchit; (b) la fatigue de la surface médiane de la tôle.

La Théorie ne tient aucun compte de ces questions, et se base en outre sur la supposition que la flexion δ est faible. Or, il n'est pas facile de définir dans que la mesure δ doit être faible.



On peut supposer que la fatigue de la surface médiane existe à partir du moment où la tôle commence à se déformer. Dans les premiers stades de la flexion, elle sera assez faible pour être négligée, mais à mesure que la charge augmente, la courbe de la flexion prend une allure descendante; lorsqu'on approche de l'effort limite, la courbe tend à se modifier et prend la direction ascendante. Ceci était clairement démontré dans ces expé-

riences par les flexions pointillées correspondant aux légères augmentations de la charge. On indique graphiquement ci-dessous le point d'inflexion (*a*) marquant le stade auquel le métal (à un point quelconque) a atteint la limite élastique, et déterminerait pratiquement l'expression « faible flexion ».

Il est difficile de voir comment ce point pourrait être précisé théoriquement d'une manière satisfaisante. Probablement n'est-il possible d'y arriver qu'expérimentalement, et à peu près de la même manière que dans le cas de la poutre en tôle mince traité par l'auteur dans la *Philosophical Magazine* ⁽¹⁾.

En essayant de définir la « faible flexion », il faut faire intervenir l'épaisseur de la tôle. Évidemment, la définition d'une tôle « mince » n'est pas liée ici avec une idée quelconque de transmission uniforme des efforts à travers la section de la tôle, comme dans le cas d'une surface cylindrique mince; il y aura en effet, et par suite, variation de l'effort selon la distance du point considéré à la surface médiane de la tôle.

En admettant que δ varie en fonction de la quatrième puissance de la dimension linéaire *b* de la tôle, et en fonction inverse du cube de l'épaisseur *T*, il faut, pour que $\frac{\delta}{b}$ ou $\frac{\delta}{T}$ soit petit, que $\frac{T}{b}$ soit relativement grand, et réciproquement; et la conception hypothétique d'une tôle mince pourrait être inexistante, à moins qu'il ne soit possible d'établir une relation raisonnable entre δ et *T*.

Si l'on veut examiner cette question un peu plus profondément à la clarté de l'expérience, on se rapportera à la Table, page 2 du Mémoire d'où sont extraits les détails suivants qui ont trait à certaines tôles rectangulaires uniformément chargées :

Cas.	<i>T</i> .	<i>b</i> .	δ .	$\frac{\delta}{T}$.	$\frac{\delta}{b}$.	$\frac{T}{b}$.	Effort calculé dans l'axe <i>b</i> .	Charge en atmo- sphères.
	cm	cm	cm					atm
(<i>a</i>).....	0,6197	36,83	0,07	0,1130	0,0019	0,01682	0,000008195	0,69
(<i>b</i>).....	0,6197	36,83	0,0939	0,1515	0,00255	0,01682	0,000014755	0,912
(<i>c</i>).....	0,7823	46,48	0,0762	0,0974	0,00164	0,01683	0,000006583	0,75
(<i>d</i>).....	0,7823	18,54	0,0165	0,0210	0,00089	0,04219	0,000001809	4,65
(<i>e</i>).....	0,6807	91,95	0,443	0,6508	0,00482	0,00740	0,000052732	0,408

(1) Volumes XXXI et XXXII, 1916.

où b est le plus petit côté de la tôle rectangulaire, et une atmosphère = 1,0276 kg/cm².

Dans chaque cas l'effort reste dans la limite élastique du métal, déterminée par le calcul; en fait une déformation nulle est retrouvée lorsqu'on supprime la charge.

L'effort moyen calculé le long du petit axe de la tôle est très faible, sauf dans le cas (e). Dans ce dernier cas il est appréciable et représente un effort direct d'environ 105 kg/cm².

Le rapport de δ à T et b , et de T à b varie de :

$$\begin{array}{l} \delta:T:b::1:40:1000 \quad \text{dans le cas de } (d) \\ \text{à} \\ \delta:T:b::2:3:400 \quad \text{dans le cas de } (e). \end{array}$$

La variation des facteurs est très large dans les différents cas. Dans le cas (e), le rapport pourrait peut-être ne pas correspondre à l'hypothèse de « flexion faible » d'une tôle mince théorique. En tout cas, il faut noter la similitude dans le caractère progressif des flexions à mesure que nous avançons du centre de la tôle aux bords, et que l'effort reste toujours dans la limite élastique.

Si l'on prend l'effort élastique comme base de discussion, il semblerait que le rapport de δ et T à b soit une question de considération pratique pour autant que δ est maintenu dans une limite raisonnable. En matière de construction, cela dépendra dans une très grande mesure de ce que la tôle sera soumise ou non à une charge « poussée » dans son plan.

Le problème de la flexion maxima intéresse au plus haut degré l'ingénieur. Dans les pages qui suivent, nous avons essayé de dégager par une synthèse des résultats expérimentaux une expression convenable pour cette « flexion maxima ».

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LA FLEXION
DE
TÔLES MINCES RECTANGULAIRES ENCASTRÉES
ET
SOUMISES A DES CHARGES UNIFORMÉMENT RÉPARTIES

MÉMOIRE.

CHAPITRE VIII.

L'EXPÉRIENCE ET LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX
ET THÉORIES MATHÉMATIQUES COMPARÉS.

Dans un précédent Mémoire ⁽¹⁾ l'auteur a discuté la distribution de l'effort dans les tôles minces rectangulaires, fixées par les bords et soumises à des charges uniformément réparties. Les arguments étaient basés sur une analyse mathématique précise des résultats d'expériences effectuées à l'Université de Leeds sur des tôles de dimensions et d'épaisseurs diverses.

Les tôles, montées sur un cadre en acier fondu dont les bords avaient été soigneusement rabotés, y étaient maintenues par des bandes surmontant les bords des tôles, et fixées par des boulons, c'est-à-dire que les tôles ne pouvaient se déplacer dans la direction de leurs plans, ni se départir du zéro de leur inclinaison ou pente aux bords lors de l'application de la charge.

La charge était appliquée hydrostatiquement à travers un tuyau aboutissant à l'espace entouré par le châssis et la tôle.

Malgré les précautions prises, il a été constaté que les tôles

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Institution of Civil Engineers*, vol. 213, part. I, 1921. (Extrait du Mémoire ci-joint, auquel la médaille d'Or George Stephenson a été décernée.)

accusaient une légère inclinaison aux bords, en général, de 3 ou 4 minutes, dont il a été tenu compte dans les conclusions définitives auxquelles on est arrivé pour les valeurs des efforts.

Aucune correction n'a été trouvée nécessaire pour cause de gondolage ou manque de netteté de la surface de la tôle. Aucune flexion n'a été observée, et aucun effort initial n'a été constaté, sauf dans le cas de la plus petite tôle, où un léger mais négligeable effort initial a été remarqué.

En dehors de l'examen de la distribution générale de l'effort, une formule était déduite donnant la valeur de l'effort maximum en fonction de la dimension et de l'épaisseur de la tôle, et de la charge appliquée.

Une formule pour la « flexion maximum » était incorporée également dans ce Mémoire, soit

$$D = \frac{n^4}{n^4 - 2} \cdot \frac{\omega^4 b^4}{32 E \cdot T^3},$$

où n est le rapport (pas inférieur à l'unité) des côtés du rectangle ;

ω , la charge par superficie unitaire de la surface de la tôle ;

b , le plus petit côté du rectangle ;

E , le module d'élasticité pour le matériel ;

T , l'épaisseur de la tôle.

Cette formule, toutefois, est basée sur les valeurs expérimentales réelles *non corrigées*, et peut être acceptée comme indiquant la flexion maximum sous les conditions pratiques d'une main-d'œuvre satisfaisante.

Dans ces dernières années, la question tant de « l'effort » que de la « flexion » des tôles minces a été abordée par plusieurs chercheurs qui ont essayé d'y trouver une solution au moyen de mathématiques pures. Une étude générale du problème est contenue dans le Mémoire de M. Jacques Hadamard dont il est fait mention à la page 2 de l'Introduction.

D'autres contributions remarquables sont celles de I. G. Boobnoff ⁽¹⁾, et les recherches de Ritz ⁽²⁾ et de Hencky ⁽³⁾.

⁽¹⁾ *Transactions Inst. Naval Architects*, vol. XLIV, 1902.

⁽²⁾ *Ueber eine neue Methode zur Losung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik (Crelle's Journal*, Berlin, 1909).

⁽³⁾ *Der Spannungszustand in rechteckigen Platten-R.* (Oldenburg, 1913).

Les deux derniers sont cités dans la quatrième édition (1927) de *The Mathematical Theory of Elasticity* par A. E. H. Love.

On se propose dans cette Thèse de prendre ensemble les expériences de Leeds et une recherche effectuée récemment par l'auteur au Polytechnique de Battersea, Londres, et de soumettre les flexions observées à correction, lorsqu'il est nécessaire, pour la pente aux bords des tôles, la flexion initiale et l'effort initial afin de déterminer :

1^o Quel changement peut être nécessaire dans la formule pour la flexion précitée;

2^o Quel est le rapport entre les flexions dérivées des expériences et de la théorie.

Les détails des expériences de Leeds sont exposés dans le Mémoire déjà cité, et ne nécessitent pas de commentaires ici.

Les expériences de Battersea ont été effectuées suivant des données à peu près semblables, mais comme il y a certains points de différence dans le détail, une description de l'appareil et de la méthode suivie est donnée ci-après.

Les tôles étaient carrées, surmontées par des bandes sur les bords et les deux soigneusement boulonnées à un châssis en fer fondu ainsi qu'il est indiqué à la figure 5 *bis*. L'étanchéité à l'eau était obtenue par l'emploi d'une feuille continue de toile à ballon dont les bords étaient intercalés entre la tôle et le châssis.

La toile n'était tendue que modérément de manière que lorsque la charge (pression d'eau) était appliquée, elle se trouvait transmise intégralement à la tôle sans être affectée par tension dans la toile elle-même.

La pression d'eau était obtenue par une conduite directe de la canalisation d'eau à l'espace entouré par la tôle et le châssis, et contrôlée par une soupape d'arrêt appropriée, soigneusement réglée, et fixée sur le tuyau de communication (*fig. 6*).

La charge était mesurée de deux manières, au moyen : (A) d'un manomètre à mercure, (B) d'un manomètre Bourdon, qui, tous deux, étaient soigneusement étalonnés, et qui sont indiqués dans la figure.

Les flexions étaient déterminées à des endroits bien définis marqués sur la tôle, au moyen d'un micromètre à cadran capable

Fig. 5.

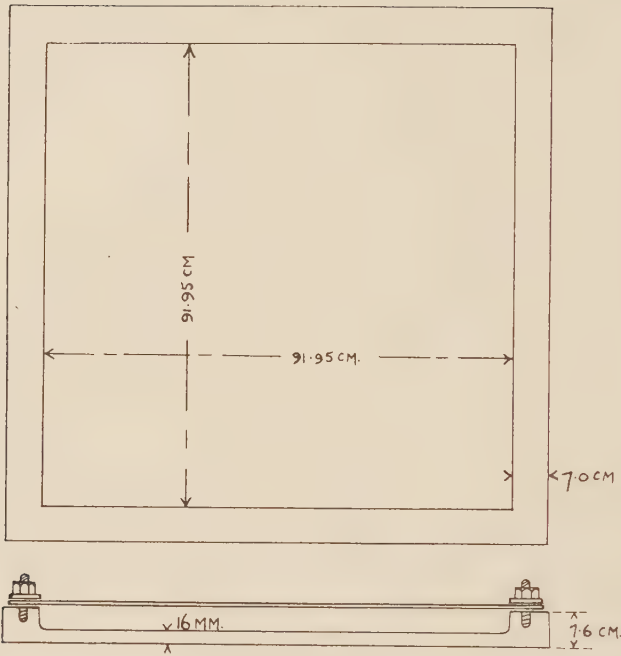
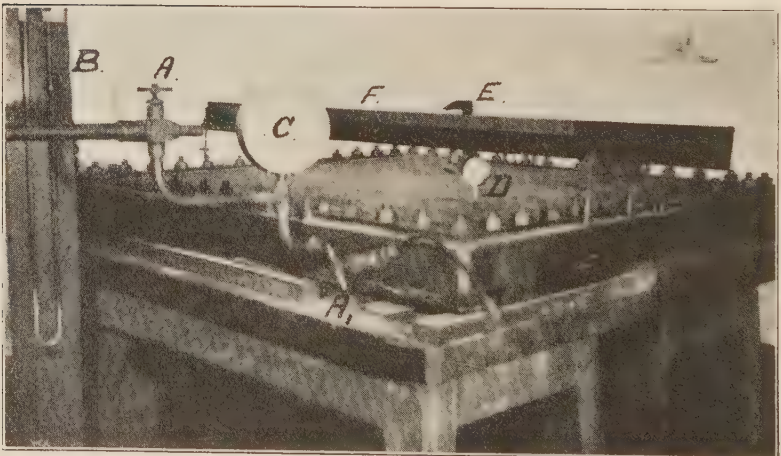


Fig. 6.



A, soupape d'arrêt; B, manomètre à mercure; C, manomètre Bourdon;
D, micromètre à cadran; E, chariot; F, pont; A₁, pompe foulante Sèparé.

d'enregistrer jusqu'à 0^{mm}, 00254. La jauge était montée ou attachée à un chariot spécialement étudié, capable de traverser un pont surmontant la tôle et supportée géométriquement par le châssis en dehors des bords de la tôle. Le pont pourrait être installé dans toute position voulue, et le chariot ajusté au-dessus de n'importe quel point particulier de la surface de la tôle (*fig. 6*).

Tout le dispositif était monté sur une base rigide en bois reposant sur un plancher solide de béton, de sorte qu'il y avait absence totale de vibration.

Des observations de température et de baromètre étaient faites par intervalles afin de ramener les indications de pression à une base uniforme de température et de pression, si nécessaire.

CHAPITRE IX.

SOURCES D'ERREUR DANS L'EXPÉRIENCE.

Les indications de flexion observées étaient corrigées, lorsque nécessaire, pour les raisons possibles suivantes :

1^o Effort initial dans la tôle occasionné par le procédé de fixation;

2^o Inégalité initiale de la surface de la tôle, ou gondolage de la tôle, par suite d'un laminage défectueux ou autre raison;

3^o Flexion des bandes de maintien aux bords lorsque la charge était appliquée;

4^o Compression partielle de la garniture aux bords des tôles sous l'action de la charge;

5^o Pente de la tôle à ses bords, résultat soit de 3^o, soit de 4^o ou des deux.

Pour toutes les tôles soumises à l'expérience, il y avait une légère pente aux bords.

Dans deux cas seulement il a été nécessaire de corriger en raison de 1^o et 2^o, et dans un cas en raison de 3^o. Ceux-ci seront étudiés par la suite.

Les courbes de flexion par rapport à la charge sont montrées aux figures 7, 8, 9, 10. D'une manière générale les traces (courbes) sont des lignes droites, montrant que l'inégalité initiale ou gondo-

Fig. 7.

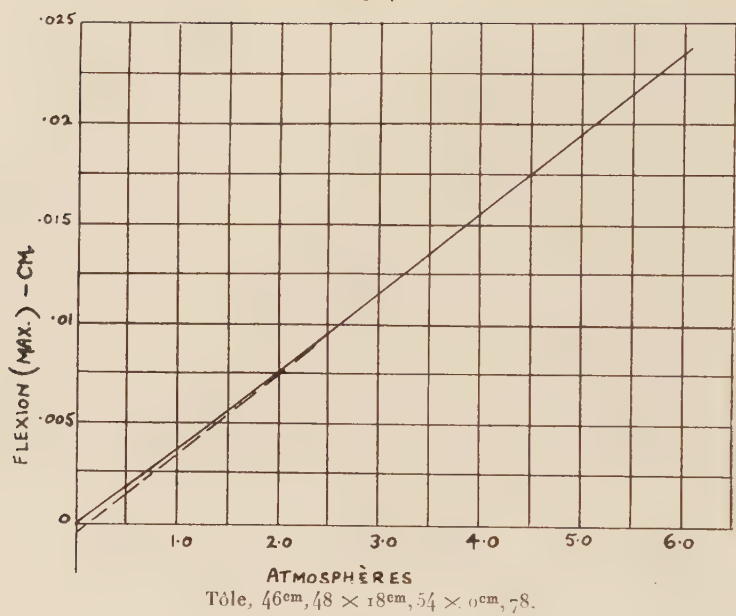


Fig. 8.

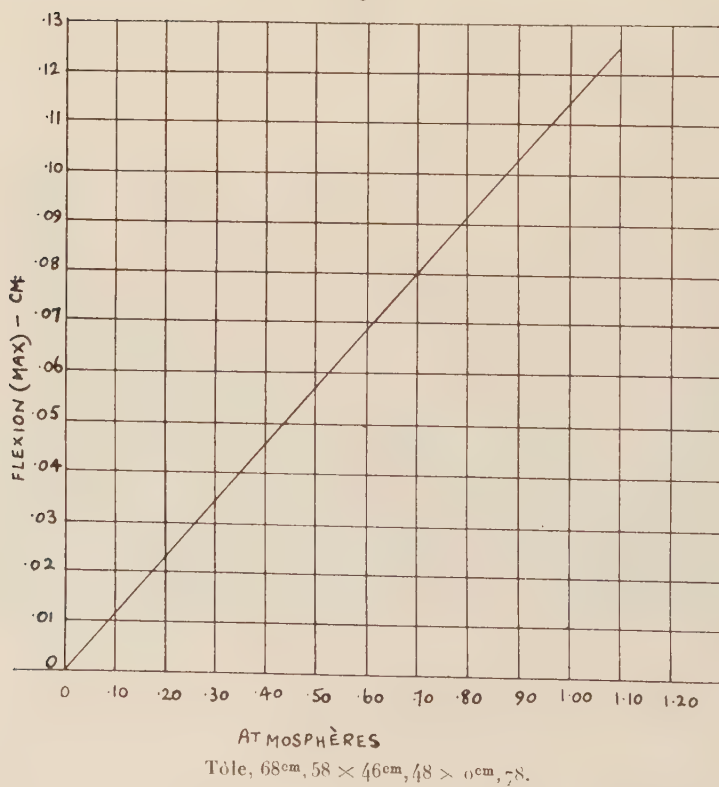
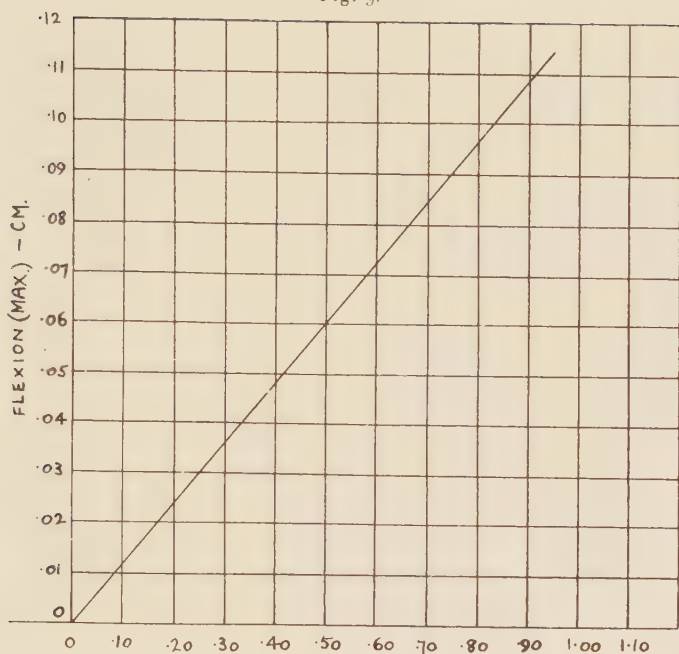
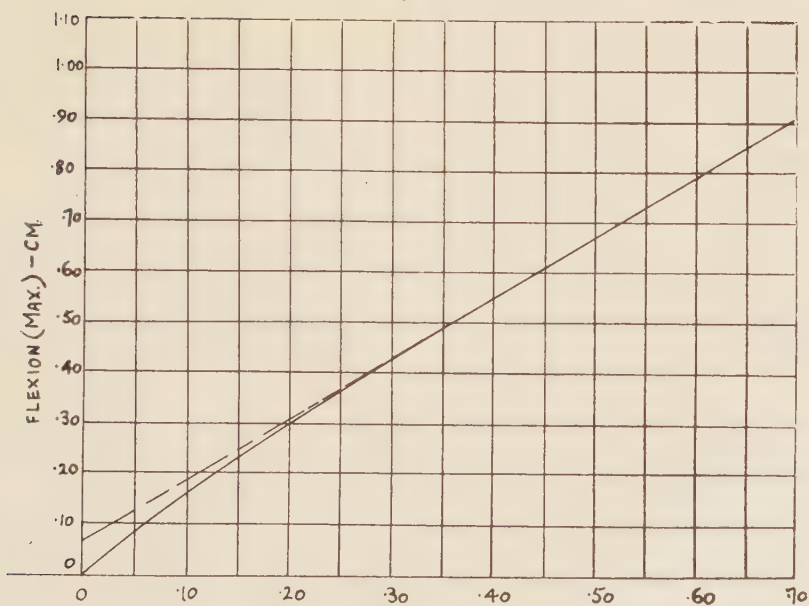


Fig. 9.



ATMOSPÈRES
Tôle, $91^{\text{cm}},41 \times 36^{\text{cm}},83 \times 0^{\text{cm}},62$.

Fig. 10.



ATMOSPÈRES
Tôle, $91^{\text{cm}},95 \times 91^{\text{cm}},95 \times 0^{\text{cm}},68$.

lage dans les tôles, s'il en existait, était négligeable. Il y avait exception, toutefois, dans le cas de deux tôles, celle de la plus petite et celle de la plus grande superficie, dans lesquelles les courbes étaient primitivement convexes et concaves par rapport à l'axe de x (charge), mais qui prenaient la forme de la ligne droite à mesure que la charge sur les tôles augmentait, indiquant une *tension* initiale dans un cas, et une *inégalité* initiale dans l'autre.

Dans le cas de celle de la plus grande superficie seulement, il y avait flexion dans les bandes utilisées pour maintenir les tôles par les bords, l'importance en étant de $0^{\text{cm}}, 000635$ pour une charge de $0,4173 \text{ kg/cm}^2$ sur la superficie de la tôle.

Les flexions étaient corrigées par tension initiale et gondolage en continuant la partie droite du tracé (courbe) en arrière pour rencontrer l'axe de y , le point d'intersection sur celui-ci représentant la valeur (+ ou —) à ajouter algébriquement aux flexions observées pour obtenir la flexion réelle de la tôle.

CHAPITRE X.

ANALYSE DES DONNÉES EXPÉRIMENTALES.

D'un examen des données expérimentales, on a trouvé que dans chaque tôle particulière la flexion maximum variait selon la charge, et avait un rapport assez constant avec la flexion maximum d'une simple poutre encastree de longueur égale à l'un des bords de la tôle, mais que pour les différentes tôles la proportion variait en quelque sorte avec le rapport entre les longueurs des bords des tôles.

De toute évidence donc, la forme d'expression pour la flexion maximum serait similaire à celle de la formule de la poutre encastree, mais impliquerait quelque fonction de n — le rapport entre les bords de la tôle, comme un facteur.

L'expression examinée est $K.\Phi(n) \frac{\omega b \varphi}{ET^0}$, dans laquelle $K.\Phi(n)$ est une fonction générale algébrique de n de la forme $\frac{n^\alpha + Q}{Rn^\beta + V}$, dans laquelle n n'est pas inférieur à l'unité et $R, Q, V, \alpha, \beta, \varphi$ et θ sont des constantes arbitraires à déterminer, ω est la charge sur

la tôle par superficie unitaire, T l'épaisseur et E le module d'élasticité pour le matériel.

Si D_1 désigne la flexion maximum d'une simple poutre encastree, soit une dans laquelle il y a liberté de mouvement latéral lorsque la poutre est sujette à fléchissement longitudinal, et une légère pente φ_1 est imposée aux extrémités de la poutre, la flexion ainsi augmentée sera $D_1 + \frac{\varphi_1 L}{4}$, où L est la longueur de la poutre; et le rapport de « flexion idéale », à « flexion avec pente » sera

$$\frac{D_1}{D_1 + \frac{\varphi_1 L}{4}} = V_1.$$

Si l'expression fonctionnelle ci-dessus pour la flexion maximum est valable, il peut être raisonnablement assumé que le coefficient $K.\Phi(n)$ variera également dans cette proportion (V_1) dans le cas d'une tôle cramponnée où D_1 maintenant représente la flexion maximum lorsque la tôle est maintenue d'une manière parfaite, et φ_1 est la pente aux extrémités de l'axe de la tôle parallèle à l'un de ses côtés où le serrage peut être défectueux.

Pour les besoins d'analyse, les cas suivants sont considérés :

Cas.	Épaisseur de la tôle.	Dimensions de la tôle.	n.	Charge.	E.	Pente aux extrémités du plus petit axe.	Flexion maxi- mum obser- vée.	Flexion maxi- mum corri- gée ⁽¹⁾ .
	cm	cm cm					cm	cm
(a)...	0,6197	91,44 × 36,83	2,483	0,69	2077580	7'-20"	0,08212	0,07000
(b)...	0,6197	91,44 × 36,83	2,483	0,912	2077580	7'-30"	0,11163	0,09393
(c)...	0,7823	68,58 × 46,48	1,475	0,75	1859610	5'-14"	0,08694	0,07620
(d)...	0,7823	46,48 × 18,54	2,507	4,65	1859610	1'-50"	0,01821	0,01646
(e)...	0,6807	91,95 × 91,95	1,000	0,408	2064860	24'-55"	0,05649	0,4430

Nota. — a, b, c. d. expériences de Leeds; e, expériences de Battersea.

où n désigne le rapport entre les bords de la tôle;

E désigne le module d'élasticité en kilogrammes par centimètre carré et la charge est en atmosphère (1 atm = 1,0276 kg/cm² = A).

(1) Voir Appendice A.

De (a) et (d) respectivement, nous obtenons

$$K \Phi(n) \frac{0,69A \times 36,83\varphi}{2077580 \times 0,6197\theta} = 0,07000;$$

$$K \Phi(n) \frac{4,65A \times 18,54\varphi}{1859610 \times 0,7823\theta} = 0,01646.$$

En première approximation nous pouvons admettre que $K.\Phi(n)$ a la même valeur dans chaque cas, puisque $n = 2,483$ et $n = 2,507$ respectivement.

Par comparaison,

$$2,946\varphi = 14,881 - \theta.$$

De même de (b) et (d)

$$2,946\varphi = 14,946 - \theta.$$

Soit une moyenne de

$$2,946\varphi = 14,913 - \theta.$$

rapport qui admet un nombre infini de solutions, mais qui n'est vérifié (approximativement) que par six valeurs positives intégrales de φ et θ soit

$$\begin{array}{cccccc} \theta = 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15, \\ \Phi = 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0. \end{array}$$

Un examen des courbes de flexion montre que la valeur de $\theta = 3$ vérifie les conditions du problème (voir Appendice B). En combinant avec le rapport donné ci-dessus, nous obtenons $\varphi = 4$ et l'expression générale devient

$$D = K \Phi(n) \frac{wb^3}{ET^3}.$$

Nous trouvons

$$K \Phi(n) = \frac{n^2 + Q}{R n^3 + V}.$$

Ramenons les flexions maxima corrigées, données à la Table, page 27, à une base commune du cas (a), par exemple, c'est-à-dire à

$$T = 0,6197, \quad b = 36,83, \quad E = 2077580.$$

$$w = 0,69A = 0,70904 \text{ kg/cm}^2,$$

et nous obtenons

De cas (a) pour $n = 2,483$	{	max. flexion =	cm = 0,0700
De cas (b) pour $n = 2,483$	{	» = $0,09393 \times \frac{690}{912}$	= 0,0710
De cas (c) pour $n = 1,475$	{	» = $0,0762 \times \frac{69}{75} \times \frac{1859610}{2077580} \times \left(\frac{36,83}{46,48}\right)^4 \times \left(\frac{0,7823}{0,6197}\right)^3$	= 0,0499
De cas (d) pour $n = 2,507$	{	» = $0,01646 \times \frac{69}{465} \times \frac{1859610}{2077580} \times \left(\frac{36,83}{18,54}\right)^4 \times \left(\frac{0,7823}{0,6197}\right)^3$	= 0,0654
De cas (e) pour $n = 1,00$	{	» = $0,413 \times \frac{690}{408} \times \frac{2064860}{2077580} \times \left(\frac{36,83}{91,95}\right)^4 \times \left(\frac{0,6807}{0,6197}\right)^3$	= 0,0254

Il y a quelque incompatibilité dans les flexions obtenues de (a) et (b), et de (d), tôles dans lesquelles les proportions dimensionnelles sont pratiquement les mêmes, soit :

De (a) et (b), flexion moyenne = 0,0705 pour $n = 2,483 = A$,

De (d), » = 0,0654 pour $n = 2,507 = B$,

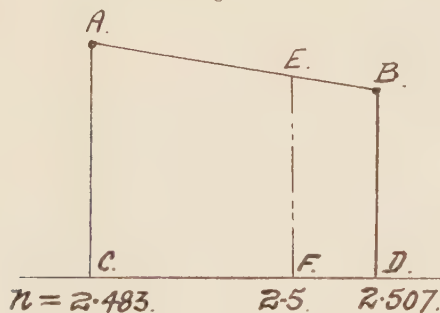
ce qui peut être considéré comme rentrant dans les limites de l'erreur expérimentale. Pour plus de facilité, déduisons la flexion pour $n = 2,5$ comme suit :

Flexion A = 0,0705

» B = 0,0654

Différence = 0,0051

Fig. 11.



Prenons la flexion pour $n = 2,5$ égale à

$$0,0654 + \frac{FD}{CD} \times 0,0051 = 0,06689.$$

$$\text{De } D = \frac{n^2 + Q}{R \cdot n^3 + V} \cdot \frac{wb^4}{ET^3}.$$

Quand $n = 0$,

$$D = \frac{Q}{V} \frac{\omega b^4}{ET^3} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Q = 0,$$

ou

$$D = \frac{n^2}{R n^{\beta} + V} \cdot \frac{\omega b^4}{ET^3} = \frac{1}{R n^{\beta - \alpha} + \frac{V}{n^2}} \times \frac{\omega b^4}{ET^3}.$$

Quand n est grand,

$$D = \frac{1}{R n^{\beta - \alpha}} \cdot \frac{\omega b^4}{ET^3},$$

soit $\beta = \alpha$ pour des valeurs finies de D ; ou généralement

$$D = \frac{n^2}{R \cdot n^{\alpha} + V} \cdot \frac{\omega b^4}{ET^3}$$

pour déterminer α , R et V .

Des considérations précédentes, lorsque $n = 1$,

$$D = \frac{1}{R + V} \times 2,6373 = 0,0254, \quad \text{c'est-à-dire} \quad R + V = 103,83;$$

lorsque $n = 1,475$,

$$D = \frac{1,475^2}{R + 1,475^{\alpha} \cdot V} \times 2,6373 = 0,0499, \quad \text{c'est-à-dire} \quad R + \frac{V}{1,475^{\alpha}} = 52,852;$$

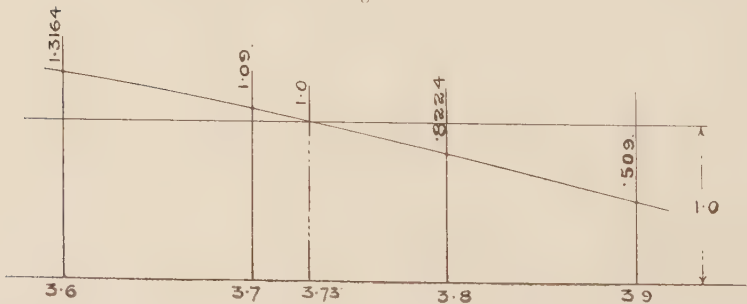
lorsque $n = 2,5$,

$$D = \frac{2,5^2}{R + 2,5^{\alpha} \cdot V} \times 2,6373 = 0,06689, \quad \text{c'est-à-dire} \quad R + \frac{V}{2,5^{\alpha}} = 39,627.$$

Éliminant R et V nous avons

$$1,2636 \times 1,695^{\alpha} - 0,2633 \times 2,5^{\alpha} = 1,$$

Fig. 12.



vérifié par $\alpha = 0$ et 3,73 représenté graphiquement ci-dessus.

Substituons dans ce qui précède, nous obtenons

$$R = 37,26 \quad \text{et} \quad V = 66,57$$

et

$$(f) \quad D = \frac{n^{3,73}}{37,26 n^{3,73} + 66,57} \times \frac{w b^3}{E T^3} = \frac{0,8586 n^{3,73}}{n^{3,73} + 1,7866} \times \frac{w b^3}{32 E T^3},$$

ce qui peut être exprimé (très à peu près) sous la forme

$$(g) \quad D = \frac{6 n^4}{7 n^4 + 12,5} \times \frac{w b^3}{32 E T^3}.$$

Une comparaison entre les coefficients de $\frac{w b^3}{E T^3}$ dans (f) et (g) est donnée ci-dessous :

	(f).	(g).
Pour $n = 1 \dots \dots \dots$	coefficient = 0,3081	0,3077
» = 2 $\dots \dots \dots$	» = 0,7560	0,7711
» = 3 $\dots \dots \dots$	» = 0,8335	0,8387
» = 4 $\dots \dots \dots$	» = 0,8516	0,8512
» = 5 $\dots \dots \dots$	» = 0,8549	0,8547

c'est-à-dire que les expressions (f) et (g) donnent pratiquement la même valeur de D.

CHAPITRE XI.

FORMULE POUR LA FLEXION MAXIMA.

Pour plus de facilité, nous choisissons la forme (g) de préférence à (f).

Module élastique « apparent » pour une tôle infiniment longue. — Lorsque $n = \infty$, la flexion maximum devient

$$D = \frac{6}{7} \frac{1}{E} \frac{w b^3}{32 T^3},$$

c'est-à-dire le module élastique « apparent » = 1,16 E par comparaison avec E sous des conditions simples d'effort.

Dans une tôle rectangulaire cramponnée où $n = \infty$, l'effort dans la direction parallèle aux longs bords peut être considéré

comme nul, sauf près des extrémités de la tôle, le matériel subissant l'effort dans le plan de la tôle, perpendiculaire aux plus longs bords, et également perpendiculaire à la tôle.

Fondamentalement le cas est similaire à celui d'un morceau de matériel soumis à une traction (ou à une poussée), l'effort étant empêché le long d'un des axes latéraux; dans ce cas le module « apparent » d'élasticité serait $\frac{E}{1-\sigma^2}$, où σ est le rapport de Poisson.

Dans la tôle considérée, $\sigma = 0,343$ (voir Appendice D) et le module « apparent » dans ces conditions serait $1,133 E$, valeur si proche de celle obtenue par les expériences, qu'elle confirme la solidité de l'analyse.

L'expression montre que pour une tôle cramponnée, en acier doux, dans laquelle la longueur est grande par rapport à la largeur, la flexion maximum peut être considérée comme les $6/7^e$ de celle d'une simple poutre encastrée, sans grande erreur.

CHAPITRE XII.

COMPARAISON DE LA FLEXION MAXIMA OBTENUE PAR LA FORMULE ET DE L'EXPÉRIENCE.

Dans le tableau ci-dessous une comparaison est établie entre les flexions maxima déduites des expériences, après correction, et celles obtenues par application de la formule (g).

Cas.	Flexion maximum déduite de l'expérience après correction.	Flexion maximum calculée d'après la formule.
	cm	cm
(a).....	0,0700	0,0675
(b).....	0,09393	0,0892
(c).....	0,07620	0,0786
(d).....	0,01646	0,0169
(e).....	0,4430	0,4425

On aura remarqué que la pente au bord de la tôle est plus grande dans les expériences de Battersea que dans celles effectuées à Leeds, bien qu'une méthode similaire de cramponnage ait été

adoptée dans les deux cas. Les raisons données en explication sont les suivantes :

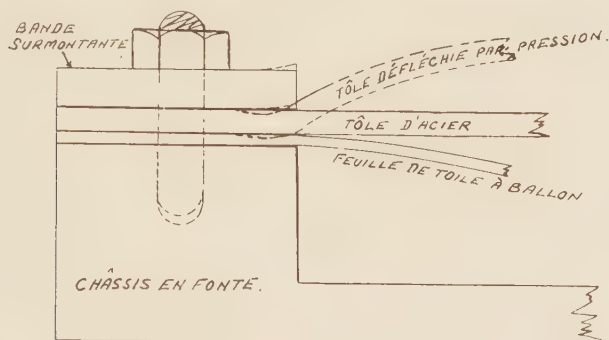
1^o La surface de la tôle soumise à la charge était plus grande à Battersea qu'à Leeds :

2^o Alors qu'à Leeds, on a employé une garniture de papier fin (mince) huilé, à Battersea on a essayé de la toile à ballon. Cette dernière matière, quoique très mince et bien comprimée par le cramponnage des tôles, est plus susceptible de céder lorsque la charge est appliquée,

bien que la flexion réelle mesurée au bord des bandes surmontant les tôles ait été très faible, soit : 0^{cm},000635 pour une pression de 0,4173 kg/cm² sur la tôle, chiffre qui n'expliquerait pas par lui-même la pente observée.

La tôle semblerait avoir été fléchie au bord en quelque sorte comme il est indiqué à la figure 13.

Fig. 13.



L'analyse expérimentale peut être résumée comme suit :

1^o Dans une tôle rectangulaire en acier doux parfaitement cramponnée le long des bords, la flexion maximum peut être représentée par la formule

$$D = \frac{6n^4}{7n^4 + 12,5} \cdot \frac{ab^4}{32ET^3},$$

où T est l'épaisseur de la tôle, b la longueur du plus petit bord et n le rapport entre les bords de la tôle (pas inférieur à l'unité), E est le module élastique pour le matériel.

2^o Lorsque n est grand, la flexion maximum peut être consi-

dérée comme les 6/7^e de celle d'une simple poutre encastrée de longueur égale au plus petit bord de la tôle.

CHAPITRE XIII.

MODULE « APPARENT » EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON.

Dans ce qui précède, compte n'a pas été tenu indépendamment du rapport de Poisson, et de la manière dont il rentre dans l'évaluation du module apparent.

Si E et σ désignent respectivement le module élastique et le rapport de Poisson, et E_a le module apparent pour la tôle, on peut supposer que

$$E_a = \frac{1}{1 - \sigma^2} \left(1 + \frac{\sigma}{f(n)} \right) E.$$

où $f(n)$ est une certaine fonction de n — à déterminer — de valeur faible ou négligeable lorsque n est grand, et appréciable lorsque n est l'unité.

Ce point a été discuté par l'auteur dans *Engineering* du 10 septembre 1915.

Dans les cas envisagés, nous avons trouvé expérimentalement ⁽¹⁾ que

Pour (a) et (b).....	$E = 2077580$	$\sigma = 0,343$
Pour (c) et (d).....	$E = 1859610$	$\sigma = 0,363$
Pour (e).....	$E = 2064860$	$\sigma = 0,264$
Valeurs moyennes.....	$E = 2000683$	$\sigma = 0,323$

La détermination expérimentale de σ n'est pas aisée. De manière large, on peut la considérer comme variant en raison inverse de E pour le même matériel. Les chiffres ci-dessus pour E et σ ont été obtenus avec grand soin, et l'on estime que les valeurs $E = 2\,000\,000$, $\sigma = 0,320$ représentent sensiblement les matériaux employés.

Cependant, en fixant une base pour notre analyse, les valeurs

$$E = 2\,100\,000 \quad \text{et} \quad \sigma = 0,3 = \left(\frac{2\,000\,000}{2\,100\,000} \times 0,320 \right)$$

(1) Voir Appendice D.

seront considérées comme étant en accord sensible avec la conception générale de l'acier doux.

Pour essayer de trouver un rapport entre E , σ et n , nous avons donc

$$E_a = \left(1,10 + \frac{0,33}{f(n)} \right) E$$

pour trouver $f(n)$.

La similarité entre le coefficient de E et celui compris dans l'expression déjà obtenue pour la flexion maximum, soit

$$D = \frac{6n^4}{7n^4 + 12,5} \cdot \frac{\omega b^4}{32ET^3},$$

sera remarquée en mettant en équation les deux coefficients, ainsi

$$1,10 + \frac{0,33}{f(n)} = 1,16 + \frac{2,083}{n^4}$$

ou

$$f(n) = \frac{10n^4}{2n^4 + 62,5},$$

c'est-à-dire

$$E_a = \frac{1}{1 - \sigma^2} \left\{ 1 + \sigma \left(0,2 + \frac{25}{4n^4} \right) \right\} E,$$

et l'expression pour la flexion maximum peut maintenant s'écrire

$$D = \frac{\omega b^4}{32\gamma ET^3},$$

où

$$\gamma = \frac{1}{1 - \sigma^2} \left\{ 1 + \sigma \left(0,2 + \frac{25}{4n^4} \right) \right\},$$

forme d'expression qu'on peut trouver préférable à celle donnée précédemment dans certains cas, où l'on désire employer σ conjointement avec n en calculant les valeurs de flexion.

ÉTUDE THÉORIQUE. — *Recherche théorique de Ritz.* — Prenons une tôle rectangulaire dont les bords sont a et b , d'épaisseur T , cramponnée à ses bords et soumise à une charge ω par unité de surface de la tôle uniformément distribuée, et le rapport de Poisson σ .

L'origine des coordonnées est prise à l'un des coins de la tôle et les axes de x et y le long des bords a et b respectivement.

La flexion de la tôle à un point quelconque s'exprime par une

série rapidement convergente

$$\sum \sum a_{mn} \xi_m(x) \eta_n(y),$$

dans laquelle

$$\xi_m = z_m \left(\operatorname{sh} k_m \frac{x}{a} - \sin k_m \frac{x}{a} \right) - \left(\operatorname{ch} k_m \frac{x}{a} - \cos k_m \frac{x}{a} \right),$$

où m a des valeurs intégrales à partir de l'unité et au-dessus, K_m est la racine $m^{\text{ième}}$ de l'équation $\operatorname{ch} K \cos K = 1$, et

$$z_m = \frac{\operatorname{ch} K_m - \cos k_m}{\operatorname{sh} K_m - \sin k_m},$$

$\eta_n(y)$ est une fonction similaire à $\xi_m(x)$, où n remplace m et où l'on écrit $\frac{y}{b}$ au lieu de $\frac{x}{a}$.

Le coefficient a_{mn} est obtenu à partir d'une série d'équations linéaires de la forme

$$a_{uv} \left(k_u^4 \frac{l^2}{a^2} + k_v^4 \frac{a^2}{b^2} + 2 \rho_{uu} \rho_{vv} \right) + 2 \sum_m \sum_n a_{mn} \rho_{mu} \rho_{nv} = \frac{\gamma z_u z_v}{k_u k_v} 10^4 l,$$

où

$$\frac{96 \omega \alpha^2 b^2 (1 - \sigma^2)}{ET^3} = 10^4 l.$$

ρ_{mn} est obtenu de

$$\rho_{mn} = -z_m^2 k_m^2 z_n^2 + 2 k_m z_m + \dots \quad (\text{où } m = n)$$

et de

$$\rho_{mn} = \frac{8 K_m^2 K_n^2}{k_m^4 - k_n^4} (K_m \rho_m - k_n \rho_n) \quad (\text{où } m \text{ et } n \text{ sont différents}).$$

Les indices dans les formules ci-dessus sont les nombres entiers impairs.

Ce qui précède forme la fondation de la théorie et présente quelques difficultés dans la solution.

CHAPITRE XIV.

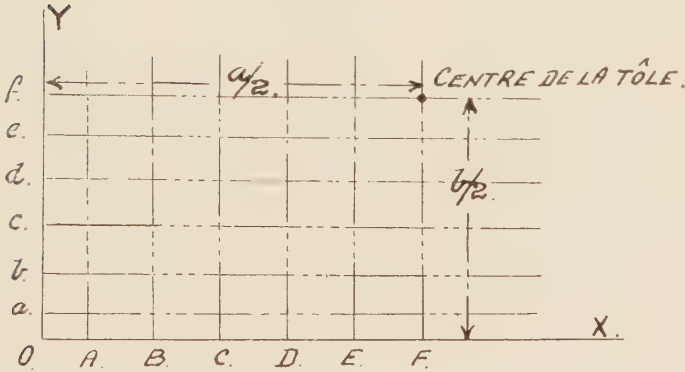
MÉTHODE DE RITZ APPLIQUÉE AUX TôLES EMPLOYÉES POUR LES EXPÉRIENCES.

Les cas de trois tôles ont été étudiés, soient (a) , (b) et (c) , où (a) est compris en entier, et les traits saillants de la solution dans (b) et (c) .

Cas (a), dans lequel :

$$\begin{aligned} a &= 91,44, & b &= 36,83, & T &= 0,6197; \\ \nu &= 0,509 \text{ kg/cm}^2; \\ E &= 2077580, & \sigma &= 0,343 \text{ (Rapport de Poisson);} \\ \frac{a}{b} &= 2,483, & \frac{b}{a} &= 0,4028. \end{aligned}$$

Fig. 14.



Considérons les points suivants sur la surface de la tôle, soit :

Pour x	$\frac{x}{a}$	0	Pour y	$\frac{y}{b}$	0
" = 2,54...	= 0,027		" = 2,413...	= 0,06551	
" = 11,176...	= 0,12		" = 4,191...	= 0,1138	
" = 19,812...	= 0,216		" = 7,747...	= 0,21035	
" = 28,448...	= 0,31		" = 11,303...	= 0,3069	
" = 37,084...	= 0,405		" = 14,859...	= 0,40345	
" = 45,72...	= 0,5		" = 18,415...	= 0,5	

Les racines de $\text{ch } K \cos K = 1$, soit K_m , où m a des valeurs intégrales impaires, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{3\pi}{2} = 0,01765 = 4,7300, \\ K_3 &= \frac{7\pi}{2} = 0,00003 = 10,9956, \\ K_5 &= \frac{11\pi}{2} = 17,2787, \\ K_7 &= \frac{15\pi}{2} = 23,562, \\ &\dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{array}{lll} x_m = 0,98250 & \text{pour} & m = 1, \\ = 0,99997 & \text{»} & = 3, \\ = \text{unité} & \text{»} & = 5, \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Pour	$\text{sh } K_m \frac{x}{a}$			$\sin K_m \frac{x}{a}$		
$\theta = \frac{x}{a} =$	$K_1 \theta.$	$K_3 \theta.$	$K_5 \theta.$	$K_1 \theta.$	$K_3 \theta.$	$K_5 \theta.$
0.....	0	0	0	0	0	0
0,027...	0,141165	0,310195	0,49861	0,13101	0,28401	0,46175
0,12....	0,61087	1,78658	4,07129	0,54634	0,97437	0,85717
0,216...	1,21441	5,369323	21,116617	0,85461	0,68835	-0,56641
0,31....	2,06313	15,28181	108,03871	0,99508	-0,27564	-0,78803
0,405...	3,331345	43,21145	552,47652	0,94023	-0,96815	0,66260
0,5.....	5,2752	122,08350	2825,13821	0,70085	-0,70711	0,70713

Pour	$\text{ch } K_m \frac{x}{a}$			$\cos K_m \frac{x}{a}$		
$\theta = \frac{x}{a} =$	$K_1 \theta.$	$K_3 \theta.$	$K_5 \theta.$	$K_1 \theta.$	$K_3 \theta.$	$K_5 \theta.$
0.....	1	1	1	1	1	1
0,027...	1,009915	1,04700	1,11741	0,99138	0,95882	0,88701
0,12....	1,17182	2,04741	4,1923	0,83756	0,22495	-0,51504
0,216...	1,57275	5,461651	21,14028	0,51927	-0,72537	-0,82413
0,31....	2,29271	15,314494	108,04334	0,09903	-0,96126	0,61563
0,405...	3,478195	43,22302	552,47742	-0,34051	-0,25038	0,74897
0,5.....	5,36915	122,0876	2825,13839	-0,71330	0,70711	-0,70707

D'où :

Pour $\theta = 0$	$\xi_1(x) = 0$	$\xi_3(x) = -0$	$\xi_5(x) = -0$
» $= 0,027$...	$= -0,0085577$	$= -0,061996$	$= -0,19354$
» $= 0,12$	$= -0,27086$	$= -1,01028$	$= -1,49322$
» $= 0,216$...	$= -0,70047$	$= -1,506188$	$= -0,281383$
» $= 0,31$	$= -1,14432$	$= -0,718774$	$= 1,39903$
» $= 0,405$...	$= -1,46945$	$= 0,70488$	$= 0,08547$
» $= 0,5$	$= -1,58815$	$= 1,40622$	$= -1,41438$

De même, pour

$\varphi = \frac{y}{b} = 0$	$\tau_1(y) = -0$	$\tau_3(y) = -0$	$\tau_5(y) = -0$
$= 0,06551$...	$= -0,086245$	$= -0,394674$	$= -0,80283$
$= 0,1138$	$= -0,2389$	$= -0,92157$	$= -1,4481$
$= 0,21035$...	$= -0,75306$	$= -1,5119$	$= -0,43356$
$= 0,3069$	$= -1,12614$	$= -0,77681$	$= 1,38244$
$= 0,40345$...	$= -1,46423$	$= 0,67624$	$= 0,13670$
$= 0,5$	$= -1,58815$	$= 1,40622$	$= -1,41438$

Les valeurs de ρ_{mn} , où m et n sont les mêmes, soient 1, 3, 5, ... sont les suivantes :

De $\rho_{mn} = \alpha_m K_m (2 - \alpha_m K_m)$:

ρ_{11}	ρ_{33}	ρ_{55}	ρ_{77}	ρ_{99}	...
—12,30207	—98,900	—263,99607	—508,14384	—831,04556	...

et où m et n sont différents de $\rho_{mn} = \rho_{nm} = \frac{8K_m^2 K_n^2}{K_m^4 - K_n^4} (K_m \alpha_m - K_n \alpha_n)$.

$\rho_{13} = \rho_{31}$	$\rho_{35} = \rho_{53}$	$\rho_{15} = \rho_{51}$	$\rho_{17} = \rho_{71}$	$\rho_{37} = \rho_{73}$
9,73067	24,50195	7,6154	6,10865	22,984
$\rho_{57} = \rho_{75}$	$\rho_{39} = \rho_{93}$	$\rho_{19} = \rho_{91}$	$\rho_{59} = \rho_{95}$	$\rho_{79} = \rho_{97}$
38,031	20,663	5,0675	38,0076	51,324

A l'aide de ce qui précède, on trouve a_{mn} pour les valeurs associées suivantes de m et n :

$m=1$	1	3	3	1	5	3	5	5
$n=1$	3	1	3	5	1	5	3	5

En substituant dans l'équation

$$a_{uv} \left(K_u^4 \frac{b^2}{a^2} + K_v^4 \frac{a^2}{b^2} + 2\rho_{uv} \right) + 2 \sum_m \sum_n a_{mn} \rho_{mu} \rho_{nv} = \frac{2x_u x_v}{K_u K_v} 10^4 t,$$

les valeurs de a_{mn} obtenues à l'approximation finale sont comme suit :

$a_{11} =$	0,25556
$a_{13} =$	0,0047605
$a_{31} =$	0,056979
$a_{33} =$	0,0020704
$a_{15} =$	0,0005064
$a_{51} =$	0,0135357
$a_{35} =$	0,00026379
$a_{53} =$	0,00081583
$a_{55} =$	0,00011676

Le déplacement ou flexion en un point quelconque de la tôle peut maintenant être calculé de ce qui précède.

Le calcul du point Ff — centre de la tôle (voir diagramme, p. 37), où $x = 45,72$, $y = 18,415$, soit $\theta = \frac{x}{a} = 0,5$ et $\varphi = \frac{y}{b} = 0,5$,

s'établit comme suit :

					$\frac{\tilde{z}}{l} = \Sigma \Sigma a_{mn} \xi_m(x) \eta_n(y).$	
<i>m.</i>	<i>n.</i>	<i>a_{mn}.</i>	<i>ξ_m.</i>	<i>η_n.</i>	Positif.	Négatif.
1	1	0,253536	—1,58815	—1,58815	0,63947400	—
1	3	0,0047605	—1,58815	1,40622	—	0,01063160
3	1	0,056979	1,40622	—1,58815	—	0,12725000
3	3	0,0020704	1,40622	1,40622	0,00409412	—
3	5	0,00026379	1,40622	—1,41438	—	0,00052465
5	3	0,00081583	—1,41438	1,40622	—	0,001622625
5	5	0,00011676	—1,41438	—1,41438	0,000233575	—
1	5	0,0005064	—1,58815	—1,41438	0,00113759	—
5	1	0,0135357	—1,41438	—1,58815	0,03040450	—
					0,675343785	0,140028875
					0,140028875	
					0,53531491	$= \frac{\tilde{z}}{l}$

$$l = 96 \times 0,8824 \times \frac{(91,44)^2 x (36,83)^2}{0,6197^3} \times \frac{0,709}{2077580} \times 10^{-4} = 0,13777$$

et la

$$\begin{aligned} \text{Flexion au centre de la tôle} &= z = 0^{\text{cm}},535315 \times 0,13777 \\ &= 0^{\text{cm}},07375 \end{aligned}$$

Flexion au centre de la tôle d'après l'expérience et après correction : 0^{cm},07000.

CHAPITRE XV.

COMPARAISONS DES FLEXIONS OBTENUES PAR L'EXPÉRIENCE ET CELLES CALCULÉES SELON LA MÉTHODE DE RITZ.

Les flexions à d'autres points ont été calculées de même et les résultats sont exposés ci-dessous par comparaison avec les flexions corrigées obtenues par l'expérience :

		Section F : <i>x</i> = 45 ^{cm} ,72.		Section E : <i>x</i> 37 ^{cm} ,084.	
Section.	<i>y.</i> ^{cm}	Expérience.	Ritz.	Expérience.	Ritz.
<i>f</i>	18,415	0,07000	0,07375	0,06761	0,07147
<i>e</i>	14,859	0,06403	0,06817	0,06330	0,06625
<i>d</i>	11,303	0,04971	0,05344	0,04948	0,05189
<i>c</i>	7,747	0,03096	0,03665	0,03038	0,03551
<i>b</i>	4,191	0,01267	0,01203	0,01277	0,01170
<i>a</i>	2,413	0,00513	0,00443	0,00539	0,00429
Bord.....	0	0	0	0	0

Section D : $x = 28^{\text{cm}}, 448$. Section C : $x = 19^{\text{cm}}, 812$.

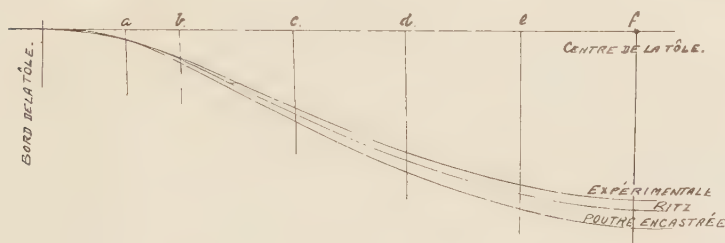
Section.	y .	Expérience.	Ritz.	Expérience.	Ritz.
f	$18,415^{\text{cm}}$	0,06505	0,06724	0,05466	0,05729
e	$14,859$	0,06027	0,06238	0,05077	0,05323
d	$11,303$	0,04824	0,04890	0,04069	0,04199
c	$7,747$	0,03040	0,03177	0,02591	0,02928
b	$4,191$	0,01341	0,01146	0,01117	0,00979
a	$2,413$	0,00601	0,004087	0,00509	0,00362
Bord ...	0	0	0	0	0

Section B : $x = 11^{\text{cm}}, 176$. Section A : $x = 0^{\text{cm}}, 54$.

Section.	y .	Expérience.	Ritz.	Expérience.	Ritz.
f	$18,415^{\text{cm}}$	0,03208	0,03122	0,004776	0,001765
e	$14,859$	0,03022	0,02906	0,004569	0,001647
d	$11,303$	0,02472	0,02307	0,003997	0,001316
c	$7,747$	0,01557	0,01616	0,002233	0,0009334
b	$4,191$	0,007165	0,00512	0,0009341	0,0003238
a	$2,413$	0,003313	0,002052	0,0006234	0,0001214
Bord.	0	0	0	0	0

Généralement il y a une assez bonne relation entre les valeurs de flexion expérimentales et théoriques aux différents points de la tôle. La forme réelle de la tôle défléchie est cependant plus plate que celle indiquée par la théorie avec quelque peu moins de courbure à mesure qu'on s'approche des bords. Ceci est illustré par la figure 15 : qui montre les courbes de la flexion à la principale section F. La même figure comporte également une courbe relative à la poutre simple encastrée.

Fig. 15.



Le cas de la deuxième tôle [cas (b)] est semblable à celui du cas (a), sauf que la charge est $w = 0,93717 \text{ kg/cm}^2$, et que la pente est à l'extrémité du plus petit axe $5' 30''$. La flexion maxi-

num obtenue par expérience après correction est $0^{\text{cm}},09393$ contre $0^{\text{cm}},097812$ obtenue par le calcul de Ritz (voir Appendice C).

Pour la tôle carrée [cas (e)],

$$n = \frac{a}{b} = \text{unité.}$$

$$a = b = 91^{\text{cm}},95. \quad T = 0,6807. \quad w = 0,4193.$$

$$E = 2064860 \quad \text{et} \quad \sigma = 0,264.$$

$$I = 96 \times 0,9303 \times \frac{(91,95)^4}{(0,6807)^3} \times \frac{0,4193}{2064860} \times 10^{-8} = 0,4110$$

et, au centre de la tôle,

$$\frac{\bar{z}}{I} = \Sigma \Sigma a_{mn} \xi_m(x) \eta_n(y) =$$

$\Sigma \Sigma a_{11} \xi_1 \eta_1 =$	$0,673714 \times 1,58815^2 \dots\dots\dots$	$1,69926$	—
$a_{13} \xi_1 \eta_3 =$	$-0,030867 \times 1,58815 \times 1,40622 \}$		
$a_{31} \xi_3 \eta_1 =$	$-0,030867 \times 1,40622 \times 1,58815 \}$	—	$0,13787$
$a_{33} \xi_3 \eta_3 =$	$0,0027907 \times 1,40622^2 \dots\dots\dots$	$0,0055185$	
$a_{35} \xi_3 \eta_5 =$	$-0,00049314 \times 1,40622 \times 1,41438 \}$		
$a_{53} \xi_5 \eta_3 =$	$-0,00049314 \times 1,41438 \times 1,40622 \}$	—	$0,0019616$
$a_{55} \xi_5 \eta_5 =$	$0,00001973 \times 1,41438^2 \dots\dots\dots$	$0,00003947$	—
$a_{15} \xi_1 \eta_5 =$	$0,003973 \times 1,58815 \times 1,41438 \}$		
$a_{51} \xi_5 \eta_1 =$	$0,003973 \times 1,41438 \times 1,58815 \}$	$0,0178486$	—
			$+ 1,582835$

soit

$$\text{Flexion au centre de la tôle} = z = 0,411 \times 1,5828 = 0^{\text{cm}},6505.$$

CHAPITRE XVI.

COMPARAISON GÉNÉRALE DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX AVEC CEUX ÉTABLIS D'APRÈS LES MÉTHODES DE CALCUL DE RITZ.

Pour les trois cas envisagés, les flexions au centre de la tôle sont comparées comme suit :

	Maximum. Flexion pour les cas.		
	(a).	(b).	(c).
Poutre encastree.....	0,0824	0,1089	1,4366
Ritz.....	0,0737	0,0978	0,6505
Expérience.....	0,0700	0,0939	0,4430
Formule (comme ci-dessus)....	0,0675	0,0892	0,4425

Hencky, dans ses recherches, a abordé le problème différemment. Les résultats calculés d'après cette méthode ne sont pas très différents de ceux de Ritz, mais sont en général légèrement inférieurs à ces derniers.

On ne se propose pas d'étudier en détail la théorie de Hencky, mais certains résultats obtenus par elle sont compris dans le tableau suivant de comparaison des flexions pour la Section F [cas (a)] :

CAS (a). — Section F ($x = 45^{\text{cm}}, 72$).

Flexions (centimètre).

			Hencky.	Ritz.	Expé- rience.	Poutre encastrée.
Pour $y = 0$	bord de la tôle (1)...	0	0	0	0	0
» = 2,413	soit <i>a</i>	0,0043	0,0043	0,0051	0,00279	0,00279
» = 4,191	» <i>b</i>	0,01194	0,01194	0,01245	0,01245	0,01245
» = 7,747	» <i>c</i>	0,0320	0,03658	0,03099	0,02896	0,02896
» = 11,303	» <i>d</i>	0,05207	0,05334	0,04978	0,05131	0,05131
» = 14,859	» <i>e</i>	0,06731	0,06807	0,06426	0,07239	0,07239
» = 18,415	» <i>f</i> (centre)...	0,07264	0,0737	0,0700	0,0823	0,0823

Les différences de flexion montrées ci-dessus sont accompagnées d'un changement dans les valeurs de l'effort. Les efforts maxima calculés suivant Ritz et Hencky ne sont pas très éloignés de l'effort maximum obtenu au moyen de la formule de la poutre encastrée. L'analyse des données expérimentales montre, cependant, qu'une réduction appréciable de l'effort maximum peut être prévue, et dans la tôle cas (a) atteint environ 35 pour 100.

Ce point est très important dans la mécanique, où en matière de construction la question d'économie de matériel est presque invariablement un facteur déterminant.

On trouve des exemples dans le cas de compartiments étendus à l'huile et à l'eau, réservoirs de stockage, docks flottants, ainsi que dans l'aviation, dans lesquels les surfaces de tôle sont exposées à une pression considérable du fluide contenu, ou extérieurement. En général de telles tôles sont divisées en surfaces rectangulaires, et rivées à la charpente de la structure, de manière à produire une condition similaire à celle imposée aux tôles considérées dans cette Thèse.

(1) Voir diagramme, page 37.

Lorsque la superficie de tôle est étendue, il pourrait n'être pas désirable d'en augmenter l'épaisseur jusqu'au point nécessaire pour éviter une flexion excessive. Dans de tels cas, on pourrait conserver une épaisseur et une flexion raisonnables en rivant aux tôles des cornières de renfort ou des nervures, dont la dimension serait déterminée par notre connaissance de la flexion maximum qui serait normalement éprouvée par des tôles libres.

Pour cette raison, une formule par laquelle les valeurs de flexion maximum peuvent être calculées avec facilité et avec suffisamment d'exactitude doit être d'une valeur appréciable pour l'ingénieur.

Cette considération forme la base de l'étude exposée dans la présente Thèse.

Vu et approuvé :

Paris, le 19 janvier 1932.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 19 janvier 1932.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.
S. CHARLETY.



APPENDICE A.

Flexions maxima observées, corrigées pour la pente au bord de la tôle, tension initiale, etc. :

Cas (a). — Dans une simple poutre encastrée de 36^{cm}, 83 de longueur et de largeur égale à l'unité :

$$\text{La flexion maximum} = \frac{0,7086 \times (36,83)^4}{32 \times 2077580 \times (0,6197)^3} \dots\dots\dots 0,082408$$

$$\text{Augmentation pour pente de } 5'20'' = \frac{36,83}{4} \times 0,0015514 \dots\dots\dots 0,014272$$

$$\text{Flexion maximum avec pente} \dots\dots\dots \underline{0,096680}$$

$$\text{Rapport } V_1 = \frac{0,082408}{0,09668} = 0,852$$

Flexion maximum de *la tôle* s'il n'existe pas de pente au bord

$$= 0,08242 \times 0,852 = 0^{\text{cm}}, 0700.$$

Cas (b). — Dans une simple poutre encastrée de 36^{cm}, 83 de longueur :

$$\text{La flexion maximum} = 0,082408 \times \frac{912}{690} \dots\dots\dots 0,108922$$

$$\text{Augmentation pour pente de } 7'30'' = \frac{36,83}{4} \times 0,00218 \dots\dots\dots 0,020072$$

$$\text{Flexion maximum avec pente} \dots\dots\dots \underline{0,128994}$$

Flexion maximum de *la tôle* s'il n'existe pas de pente au bord

$$= 0,11163 \times \frac{10892}{12899} = 0^{\text{cm}}, 09393.$$

Cas (c). — Dans une simple poutre encastrée de 46^{cm}, 48 de longueur :

$$\text{La flexion maximum} = \frac{0,76675 \times (46,48)^4}{32 \times 1859610 \times (0,7823)^3} \dots\dots\dots 0,12561$$

$$\text{Augmentation pour pente de } 5'14'' = \frac{46,48}{4} \times 0,001522 \dots\dots\dots 0,01769$$

$$\text{Flexion maximum avec pente} \dots\dots\dots \underline{0,14330}$$

Flexion maximum de *la tôle* s'il n'existe pas de pente au bord

$$= 0,08694 \times \frac{1256}{1433} = 0^{\text{cm}}, 07620.$$

Cas (d). — Dans une simple poutre encastrée de 18^{cm}, 54 de longueur :

$$\text{La flexion maximum} = \frac{4,75888 \times (18,54)^4}{32 \times 1859610 \times (0,7823)^3} \dots\dots\dots 0,019735$$

$$\text{Augmentation pour pente de } 1'50'' = \frac{18,54}{4} \times 0,0005333 \dots\dots\dots 0,002472$$

$$\text{Flexion maximum avec pente} \dots\dots\dots 0,022207$$

$$\text{Flexion maximum observée de la tôle} = 0,01821.$$

$$\text{Correction pour la tension initiale dans la tôle} = \frac{0,00028}{0,01849}.$$

Flexion maximum de *la tôle* s'il n'existe pas de pente au bord

$$: 0,01849 \times \frac{19735}{22207} = 0^{\text{cm}}, 01646.$$

Cas (e). — Dans une simple poutre encastrée de 91^{cm}, 95 de longueur :

$$\text{La flexion maximum} = \frac{0,4171 \times (91,95)^4}{32 \times 2064860 \times (0,6807)^3} \dots\dots\dots 1,43067$$

$$\text{Augmentation pour pente de } 24'55'' = \frac{91,95}{4} \times 0,0072479 \dots\dots\dots 0,166613$$

$$\text{Flexion maximum avec pente} \dots\dots\dots 1,59728$$

$$\text{Flexion maximum observée de la tôle} = 0,5649.$$

$$\text{Correction pour gondolage initial dans la tôle} = \frac{0,06985}{0,49505}.$$

$$\text{Correction pour la flexion de la bande de maintien} = \frac{0,00063}{0,49442}.$$

Flexion maximum de *la tôle* s'il n'existe pas de pente au bord

$$= 0,49442 \times \frac{14307}{15973} = 0^{\text{cm}}, 4430.$$

APPENDICE B.

Dans une tôle quelconque, c'est-à-dire une tôle dans laquelle *b* et *n* ont des valeurs particulières, montrer que flexion $\propto \frac{1}{T}$.

Des courbes de la flexion observées, nous obtenons :

1^o Pour une tôle 68^{cm}, 58 × 46^{cm}, 48 sous une charge = 0,5 A.

Lorsque T = 0,6197 et E = 2077580 Flexion = 0,10871.

Lorsque T = 0,7823 et E = 1859610 » = 0,05842.

Par comparaison

$$\text{Si } \left(\frac{0,7823}{0,6197} \right)^0 = \frac{0,10871}{0,05842} \times \frac{2077580}{1859610}, \quad \theta = 3,1407.$$

2° Pour une tôle 91^{cm}, 44 × 36^{cm}, 83 sous une charge 0,75 A.

Lorsque T = 0,6197 et E = 2077580 Flexion = 0,09017;

Lorsque T = 0,7823 et E = 1859610 " = 0,04826.

$$\text{Si } \left(\frac{0,7823}{0,6197} \right)^0 = \frac{0,09017}{0,04826} \times \frac{2077580}{1859610}, \quad \theta = 3,1582.$$

3° Pour une tôle 46^{cm}, 48 × 18^{cm}, 54 sous une charge 3,0 A.

Lorsque T = 0,6197 et E = 2077580 Flexion = 0,021463;

Lorsque T = 0,7823 et E = 1859610 " = 0,01143.

$$\text{Si } \left(\frac{0,7823}{0,6197} \right)^0 = \frac{0,021463}{0,01143} \times \frac{2077580}{1859610}, \quad \theta = 3,1796.$$

leur moyenne pour $\theta = 3,1528$ (= 3 approximativement).

APPENDICE C.

Cas (b). — Dimensions, de la tôle comme dans le cas (a), mais la charge $w = 0,93717$ kg/cm², et la pente à l'extrémité du plus petit axe 7' 30".

Rapport entre les flexions calculées d'après Ritz et celles obtenues expérimentalement, après correction :

Section.	y .	Section F : $x = 45^{\text{cm}}, 72$.		Section E : $x = 37^{\text{cm}}, 084$.	
		Expérience.	Ritz.	Expérience.	Ritz.
f	18,415 ^{cm}	0,09393	0,07812	0,090997	0,0943404
e	14,859	0,085554	0,089884	0,084928	0,0874500
d	11,303	0,066998	0,070488	0,066998	0,0684848
c	7,747	0,042220	0,048378	0,041748	0,046860
b	4,191	0,0176148	0,01584	0,017922	0,015444
a	2,413	0,0074466	0,0058476	0,007703	0,0056628
Bord.	0	0	0	0	0

Section D : $x = 28^{\text{cm}}, 448$.

Section C : $x = 19^{\text{cm}}, 812$.

Section.	y .	Expérience.	Ritz.	Expérience.	Ritz.
f	$18,415^{\text{cm}}$	0,087049	0,088757	0,072971	0,0756228
e	14,859	0,080640	0,082368	0,0676368	0,0702636
d	11,303	0,064646	0,064548	0,054600	0,055440
c	7,747	0,0413448	0,041936	0,034776	0,0386496
b	4,191	0,018522	0,0151272	0,015187	0,0129228
a	2,413	0,008726	0,0053948	0,006977	0,0047824
Bord.	0	0	0	0	0

Section B : $x = 11^{\text{cm}}, 176$.

Section A : $x = 2^{\text{cm}}, 54$.

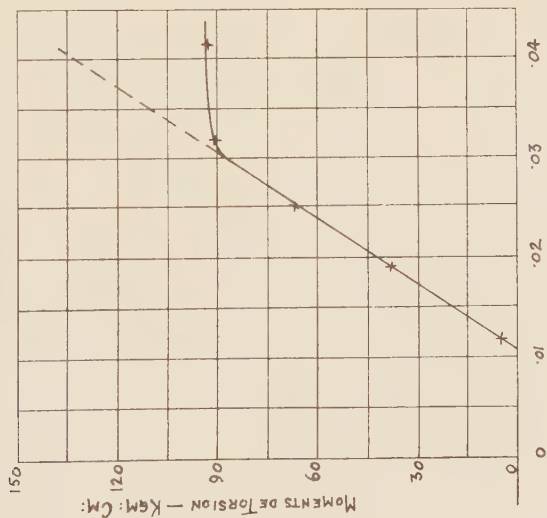
Section.	y .	Expérience.	Ritz.	Expérience.	Ritz.
f	$18,415^{\text{cm}}$	0,042882	0,0412104	0,006720	0,0023298
e	14,859	0,040320	0,0383592	0,006098	0,00217604
d	11,303	0,033281	0,0304524	0,005544	0,00173712
c	7,747	0,0211008	0,0213312	0,0030727	0,00123212
b	4,191	0,0092988	0,0067584	0,0012844	0,0004274
a	2,413	0,004309	0,0027060	0,0007702	0,00016025
Bord.	0	0	0	0	0



APPENDICE B.

Détermination expérimentale de « E » (mod. élastique) et « C » (mod. de rigidité),

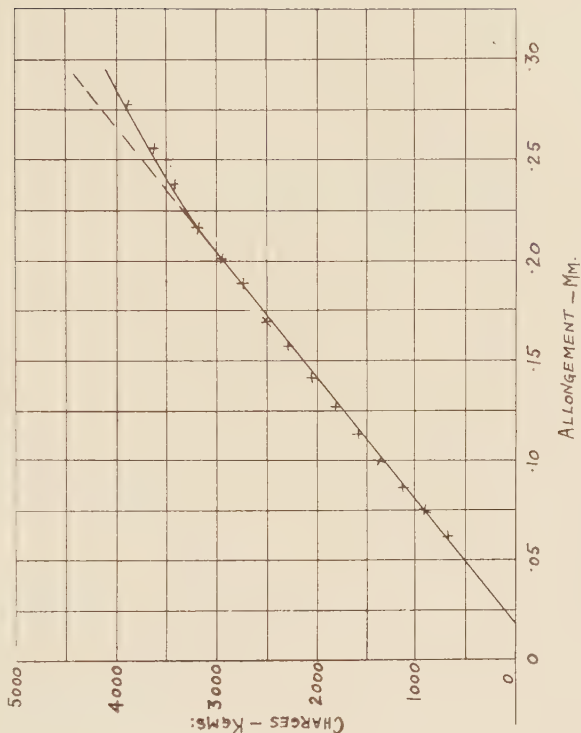
Spécimen A.



Cas (a et b), spécimen A : $11\text{ cm},557 \times 0\text{ cm},5715$ diam.

Cas (a et b), spécimen B : $20\text{ cm},32 \times 2\text{ cm},5 \times 0\text{ cm},6197$

Spécimen B.



$$C = \frac{32 \times 120 \times 11,557}{2\pi^3 \times 0,027 \times 0,5715^4} = 0,774 \times 10^6 \text{ kgm/cm}^2$$

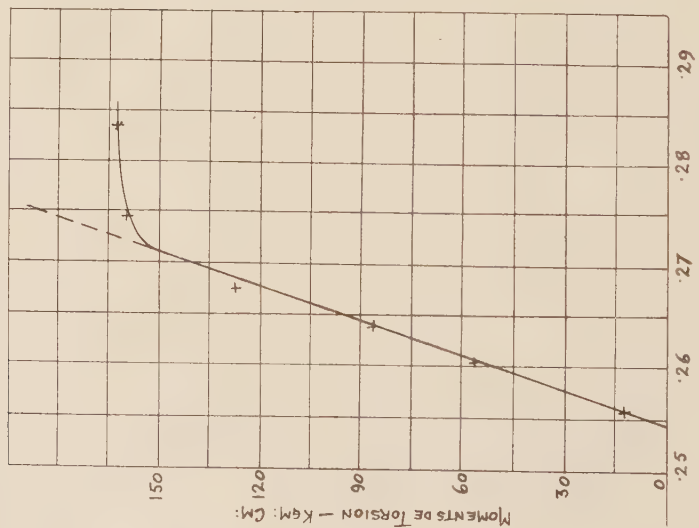
$$E = \frac{9818 \times 20,32}{0,6197 \times 2,5 \times 0,0178} = 2,078 \times 10^6 \text{ kgm/cm}^2$$

$$\frac{1}{5} = \frac{E}{2C} - 1 = 0,343.$$

APPENDICE D (suite).

Détermination expérimentale de « E » (mod. élastique) et « C » (mod. de rigidité).

Spécimen A₁.



ANGLE DE TORSION - REYS:

Cas (c et d), spécimen A₁ : 11 cm, 938 × 6 cm, 7112 diam.

$$C = \frac{32 \times 177 \times 11,938}{2\pi^2 \times 0,0195 \times 0,7112^4} = 0,683 \times 10^6 \text{ kgm/cm}^2$$

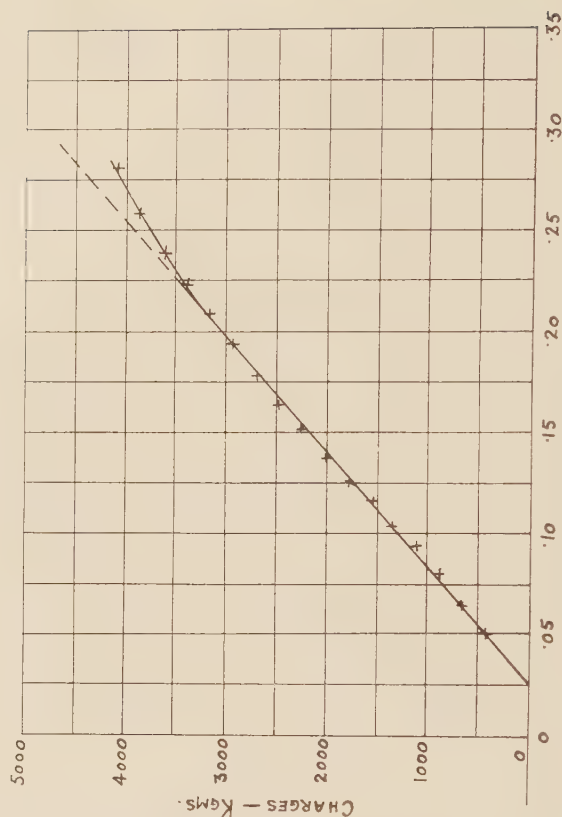
$$\frac{1}{2} = \frac{E}{2C} - 1 = 0,363.$$

Cas (c et d), spécimen B₁ : 20 cm, 32 × 2 cm, 489 × 6 cm, 7833

$$E = \frac{2500 \times 20,32}{0,7833 \times 2,489 \times 0,0195} = 1,86 \times 10^6 \text{ kgm/cm}^2$$

Cas (c) C = 9.812 × 10⁶ E = 9.063 × 10⁶

Spécimen B₁.



ALLONGEMENT - MM:

$$C = \frac{32 \times 177 \times 11,938}{2\pi^2 \times 0,0195 \times 0,7112^4} = 0,683 \times 10^6 \text{ kgm/cm}^2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{E}{2C} - 1 = 0,363.$$

Cas (c et d), spécimen B₁ : 20 cm, 32 × 2 cm, 489 × 6 cm, 7833

$$E = \frac{2500 \times 20,32}{0,7833 \times 2,489 \times 0,0195} = 1,86 \times 10^6 \text{ kgm/cm}^2$$

Cas (c) C = 9.812 × 10⁶ E = 9.063 × 10⁶

LISTE DES ILLUSTRATIONS.

INTRODUCTION.

	Pages.
Diagramme de Steintal.....	8
Diagramme relatif à l'analyse de Knott (<i>fig. 2</i>).....	11
Diagramme relatif à l'analyse de Laws (<i>fig. 3</i>).....	12
Un diagramme (<i>fig. 4</i>).....	15

MÉMOIRE.

Croquis du châssis expérimental et de la tôle (<i>fig. 5</i>).....	22
Photographie de l'appareil (<i>fig. 6</i>).....	22
Quatre courbes relatives à la flexion maxima (<i>fig. 7, 8, 9, 10</i>)... 24 et	25
Un diagramme (<i>fig. 11</i>).....	29
Un diagramme (<i>fig. 12</i>).....	30
Un croquis (<i>fig. 13</i>).....	33
Un croquis diagrammatique (<i>fig. 14</i>).....	37
Un diagramme (<i>fig. 15</i>).....	41

APPENDICE D. — Diagrammes relatifs aux modules.....	49 et 50
---	----------

TABLE DES MATIÈRES.

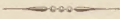
INTRODUCTION.

	Pages.
Historique.....	1
But des recherches.....	3
Suppositions faites dans la pratique et dans la théorie élastique.....	3
L'équation fondamentale.....	4
Méthode d'analyse de Hencky.....	5
Différence entre les résultats théoriques et expérimentaux.....	6
Difficultés du problème.....	6
Expériences précédentes sur des tôles circulaires et rectangulaires.....	7
L'analyse de Knott des résultats de Crawford.....	10
Comparaison avec les expériences de l'auteur.....	10
Conclusions générales.....	14
Raisons du désaccord entre la théorie et l'expérience.....	14

MÉMOIRE.

L'expérience et les résultats expérimentaux et théories mathématiques comparés.....	19
Sources d'erreur dans l'expérience.....	23
Analyse des données expérimentales.....	26
Formule pour la flexion maxima.....	31
Comparaison de la flexion maxima obtenue par la formule et l'expérience.....	32
Module « apparent » en fonction du coefficient de Poisson.....	34
Étude théorique. Recherche théorique de Ritz.....	35
Méthode de Ritz appliquée aux tôles employées pour les expériences... ..	36
Comparaisons des flexions obtenues par l'expérience et celles calculées selon la méthode de Ritz.....	40
Comparaison générale des résultats expérimentaux avec ceux établis d'après les méthodes de calcul de Ritz.....	42
APPENDICES A, B, C et D.....	45 à 50

SECONDE THÈSE.



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.



Recherches expérimentales sur les déformations des navires.

Vu et approuvé :

Paris, le 19 janvier 1932.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 19 janvier 1932.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
S. CHARLÉTY.



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}

92543

Quai des Grands-Augustins, 55

PARIS. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et C^{ie}
55, quai des Grands-Augustins.

92513-32
